

$$= \begin{bmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_3 \rangle \end{bmatrix}$$

$$\text{Not: } v_i \perp v_j \quad (i \neq j) \quad \text{ve } \langle v_i, v_i \rangle = 1$$

$$R(v) = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 \text{ olsun.}$$

$$\|R(v) - R(e_i)\|^2 = \|v - e_i\|^2$$

$$\Rightarrow \|(\beta_1, \beta_2, \beta_3) - (1, 0, 0) \|^2 = \| (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - (1, 0, 0) \|^2$$

$$\Rightarrow (\beta_1 - 1)^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = (\alpha_1 - 1)^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$$

Aynen

$$\beta_1^2 + (\beta_2 - 1)^2 + \beta_3^2 = \alpha_1^2 + (\alpha_2 - 1)^2 + \alpha_3^2$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + (\beta_3 - 1)^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + (\alpha_3 - 1)^2$$

$$\text{Ayrıca, } \|R(v)\|^2 = \|v\|^2 \Rightarrow$$

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$$

$$R = S^{-1} \tilde{U}$$

$$0 \text{ zaman a) } R(e_i) = e_i$$

$$v \in \mathbb{R}^3 \text{ olsun, } v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

$$\Rightarrow R(v) = v$$

Bu her v için geçerli.

$$\Rightarrow R = I_3$$

$$\Rightarrow S^{-1} \tilde{U} = I_3$$

$$\Rightarrow \tilde{U} = S$$

$$\Rightarrow T(v) = S(v) + w \quad \forall v$$

$\mathbb{R}^3$ üzerinde izometri

Bir döndürme ve bir
itme ile yazılabilir.

Thm. 3.4 (İspat)

Frenet - Serret

$$\begin{pmatrix} \dot{t}_1 \\ \dot{n}_1 \\ \dot{b}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 \\ -\kappa_1 & 0 & \tau_1 \\ 0 & -\tau_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ n_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

ve aynı şekilde γ_2 için.

Bu bir birinci dereceli denklem.

$$r = \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{r} = A r$$

$$r(0) = \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix} \bigg|_{0} = v$$

$A(S)$

Thm (Diferensiyel denklemlerden)

(8)

$$\dot{r} = A r \quad r(0) = v$$

bir denklem olsun.

0 zaman onun tek bir

çözüm var.

İspat devam

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ n_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \bigg|_{0} = v \quad \begin{pmatrix} t_2 \\ n_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \bigg|_{0} = w$$

$$s(t_1) = t_2$$

$$s(n_1) = n_2$$

$$s(b_1) = b_2$$

sağlayan bir
orthogonal matris
var.

$$\begin{cases} \dot{r} = A r \\ \dot{s} = A s \end{cases}$$

$$(r-s) = A(r-s)$$

$$t := r-s$$

$$\dot{t} = A t$$

$$t(0) = 0$$

Thm 3.4 γ_1, γ_2 iki binyim 3
 bir egrisi olsun. $\gamma_1, \gamma_2: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^3$
 eger $k_1(s) = k_2(s)$ $s \in (\alpha, \beta)$
 $\tau_1(s) = \tau_2(s)$

0 zaman, $\tau \circ \gamma_1 = \gamma_2$
 Saglayan bir izometri var.

Lemma 3.5 $\dot{r} = Ar$ $r(0) = v$ (*)

diferensiyel denklem olsun.
 $A = A(t)$ matris degerli fonksiyon
 ve surekli olsun. $(A(t) \in M_n(\mathbb{R}))$
 0 zaman bunun tek bir $r(t) \in \mathbb{R}^n$
 cozum var.

ispat (Lemma 3.5)

$$r(t) = \exp \left[\int_0^t A(s) ds \right] r(0)$$

0 zaman bu denklem (*)
 saglandigini kontrol ediniz.

(Demek ki ≥ 1 cozum var)

Iddia: En fazla bir cozum var

Varsayalim: $\dot{r}_1 = A r_1$ $r_1(0) = v$
 $\dot{r}_2 = A r_2$ $r_2(0) = v$

$$r_3 := r_1 - r_2$$

0 zaman, $\dot{r}_3 = A r_3$ $r_3(0) = 0$

Sinayda bu soru olacak:
 $\dot{r} = Ar$ $r(0) = v$ bir $\mathbb{R}^n$ degerli denklem olsun.

$r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ $A: \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, surekli.

0 zaman bunun en fazla bir cozum var.

bu vektör olsun. $(A \in M_n(\mathbb{R}))$
 0 zaman bunun tek bir $r(t) \in \mathbb{R}^n$
 çözüm var.

Sinayda bu soru olacak:
 $r = Ar$ $r(0) = v$ bir $\mathbb{R}^n$ değerli denklem olsun.
 $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ $A: \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, Sürekli.
 0 zaman bunun en fazla bir çözüm var.

İspat (Thm 3.4)

Öyle bir ortogonal matris S
 ve bir vektör v bulalım ki,

$$\tilde{y}_1 = S \cdot \gamma_1 + v \text{ desek,}$$

$$\tilde{y}_1(0) = \gamma_2(0)$$

$$\tilde{t}_1 = t_2$$

$$\tilde{n}_1 = n_2$$

$$\tilde{b}_1 = b_2$$

Eğrilik ve torsion izometrilere
 altında değişmez.

Demek ki $\tilde{y}_1$ ve γ_2 karşılaştırsak,

$$\tilde{y}_1(0) = \gamma_2(0)$$

$$\tilde{y}_1(s) := \begin{pmatrix} \tilde{t}_1(s) \\ \tilde{n}_1(s) \\ \tilde{b}_1(s) \end{pmatrix}$$

$$u \quad \gamma_2(s) := \begin{pmatrix} t_2(s) \\ n_2(s) \\ b_2(s) \end{pmatrix} \text{ baksak,}$$

$$\tilde{y}_1(0) = \gamma_2(0).$$

Frenet - Serret :

$$\dot{\tilde{y}}_1 = A \tilde{y}_1 \quad \tilde{y}_1(0) = v$$

$$\dot{\gamma}_2 = A \gamma_2 \quad \gamma_2(0) = v$$

$$\text{Demek } \tilde{y}_1 \equiv \gamma_2$$

$$\Rightarrow \tilde{t}_1 \equiv t_2 \Rightarrow \tilde{y}_1 = \gamma_2 + w \quad \text{Sabit vektör}$$

$$\text{Ama } \tilde{y}_1(0) = \gamma_2(0) \Rightarrow w = 0.$$

Sonuç,

$$\tilde{y}_1 \equiv \gamma_2 \Rightarrow S \cdot \gamma_1 + v = \gamma_2$$

(2)

Sabit



isoperimetric inequalities

Theorem 4.1

basit kapalı

$\gamma \subset \mathbb{R}^2$ bir eğri olsun.

(Basit: kendinde kesişmiyor)

$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sürekli
 $0 < s \neq t \leq 1 \Rightarrow \gamma(s) \neq \gamma(t)$
 Kapalı: $\gamma(0) = \gamma(1)$

$l(\gamma)$: uzunluğu

$A(\gamma)$: kapsadığı alan.

0 zaman $A(\gamma) \leq \frac{l(\gamma)^2}{4\pi}$

ve eşitlik varsa, γ bir çembere dir.

İspat (Düzgün eğriler için yapacağız)

Green Thm: (Matematika)

0 zaman

$F, G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

γ : pozitif orientasyon
olan eğri

$$\int_{\gamma} F dx + G dy = \iint_{\text{Int}(\gamma)} \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy$$

Int(γ)
(İç kısım)

Özellikle,

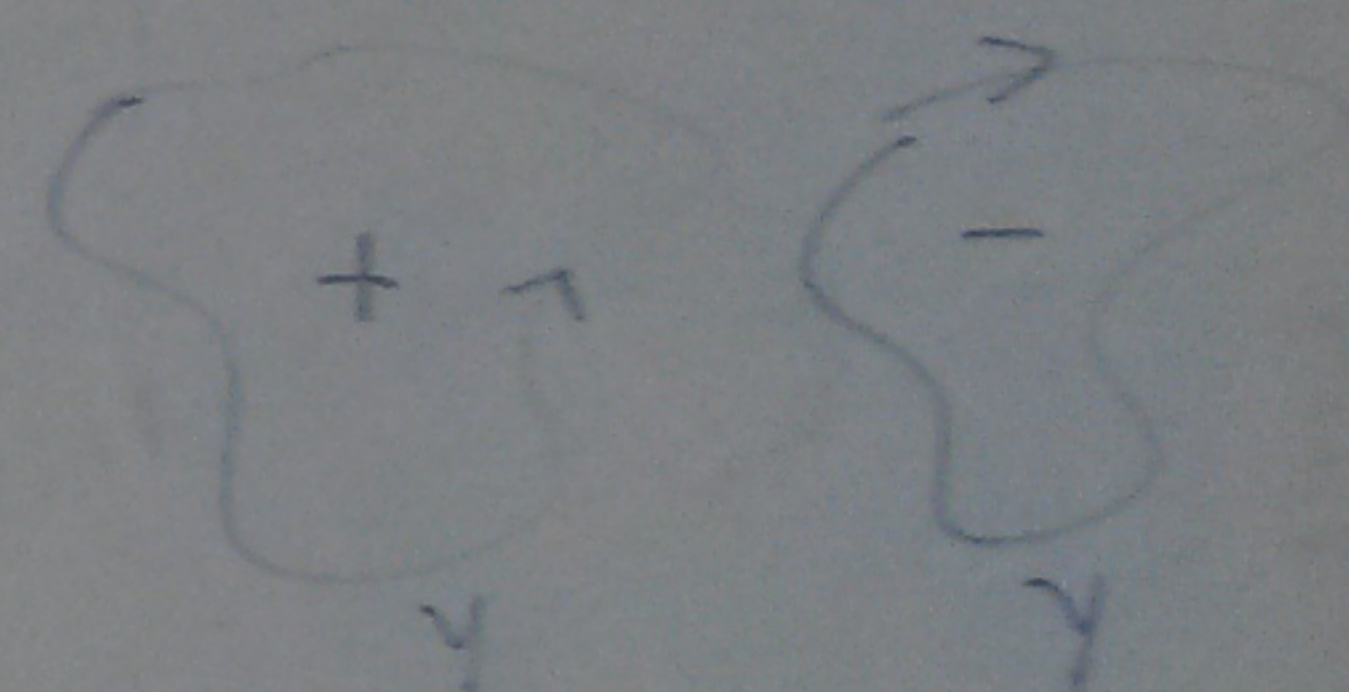
$$|\text{Int}(\gamma)| := \iint_{\text{Int}(\gamma)} 1 dx dy = \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx$$

Int(γ)

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x \dot{y} - y \dot{x}) dt$$



0 zaman $A(\gamma) \leq \frac{C(\gamma)}{4\pi}$
 ve eşitlik varsa, γ bir çembendir.

$$\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi (x\dot{y} - y\dot{x}) dt$$

$$\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$x(t) = r(t) \cos \theta(t)$$

$$y(t) = r(t) \sin \theta(t)$$

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \cos \theta \dot{\theta}$$

$$A(\gamma) = |\text{Int}(\gamma)| = \frac{1}{2} \int_0^\pi (x\dot{y} - y\dot{x}) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 \dot{\theta} dt$$

γ için oydu bir parametrisasyon verelim ki

$$|\dot{\gamma}| = \frac{|\gamma|}{\pi}$$

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2$$

$$= \|(\dot{x}, \dot{y})\|^2$$

$$= \|\dot{\gamma}\|^2$$

$$= \frac{|\gamma|^2}{\pi^2}$$

$$\frac{|\gamma|^2}{4\pi} - A(\gamma) = \frac{1}{4} \int_0^\pi (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 - 2r^2 \dot{\theta}) dt$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{|\gamma|^2}{\pi^2} \cdot \pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 \dot{\theta} dt$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} A(\gamma) &= \frac{1}{4} \int_0^\pi (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 - 2r^2 \dot{\theta}) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi r^2 (\dot{\theta} - 1)^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^\pi (\dot{r}^2 - r^2) dt \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Lemma (Wirtinger Eşitsizlik)

$F: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ furevlenabilin
 $0 = F(0) = F(\pi)$ olsun. 0 zaman,

$$\int_0^\pi \left(\frac{dF}{dt} \right)^2 dt \geq \int_0^\pi F^2 dt$$

ve Eşitlik $\Leftrightarrow F = C \sin(t)$.

$$Eşitlik \Rightarrow \frac{dG}{dt} = 0 \Rightarrow G \equiv C.$$

İspat (Lemma)

$$G(t) := \frac{F(t)}{\sin(t)} \quad t \in (0, \pi)$$

$$G(0) := F'(0)$$

$$G(\pi) := F'(\pi)$$

kontrol ediniz: G sürepli ve furevlenabilin.

$$F(t) = G(t) \sin t$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dG}{dt} \sin t + G \cos t$$

$$\left(\frac{dF}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dG}{dt} \right)^2 \sin^2 t + G^2 \cos^2 t + 2G \frac{dG}{dt} \sin t \cos t$$

$$f \in E_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow F = C \sin(t)$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{dF}{dt} \right)^2 dt = \int_0^\pi \left(\frac{dG}{dt} \right)^2 \sin^2(t) dt$$

$$+ \int_0^\pi G^2 \cos^2(t) dt$$

$$+ \int_0^\pi 2G \frac{dG}{dt} \sin t \cos t dt$$

$$\rightarrow \int_0^\pi 2G \frac{dG}{dt} \sin t \cos t dt = \int_0^\pi \frac{d}{dt} (G^2) \sin t \cos t dt$$

$$= \left[G^2 \sin t \cos t \right]_0^\pi - \int_0^\pi G^2 (\cos^2 t - \sin^2 t) dt \quad (6)$$

$$= - \int_0^\pi G^2 (\cos^2 t - \sin^2 t) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \left(\frac{dF}{dt} \right)^2 dt = \int_0^\pi \left(G^2 + \left(\frac{dG}{dt} \right)^2 \right) \sin^2(t) dt$$

$$= \int_0^\pi F^2 dt + \int_0^\pi \left(\frac{dG}{dt} \right)^2 \sin^2(t) dt$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \left(\frac{dF}{dt} \right)^2 dt \geq \int_0^\pi F^2 dt \geq 0$$

$$f \in E_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \frac{dG}{dt} \equiv 0 \Rightarrow G \equiv C$$

Tanım

$$K_s := \dot{\varphi}(s)$$

$\gamma(s)$

İşareti ağırlık denir.

Lemma

$$|K_s| = k$$

İspat (İzoperimetri, devam)

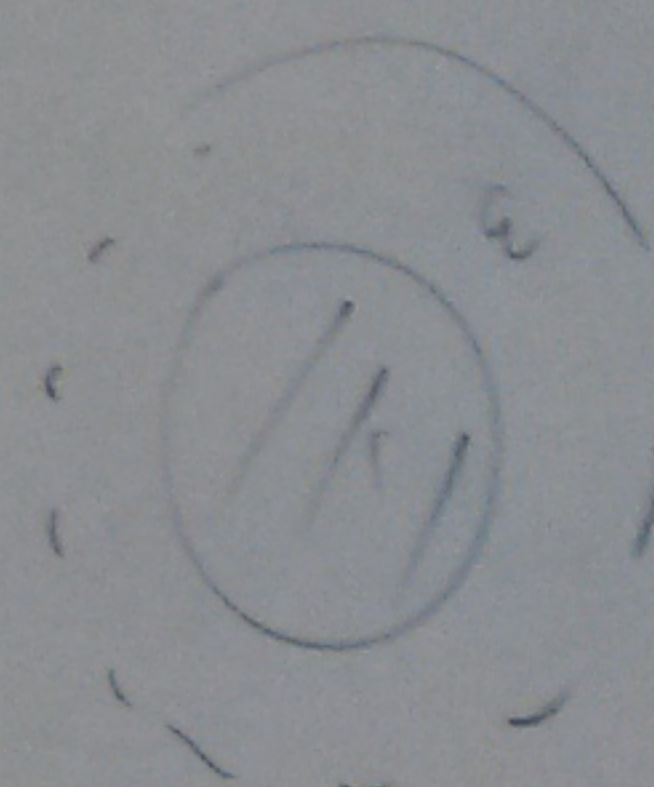
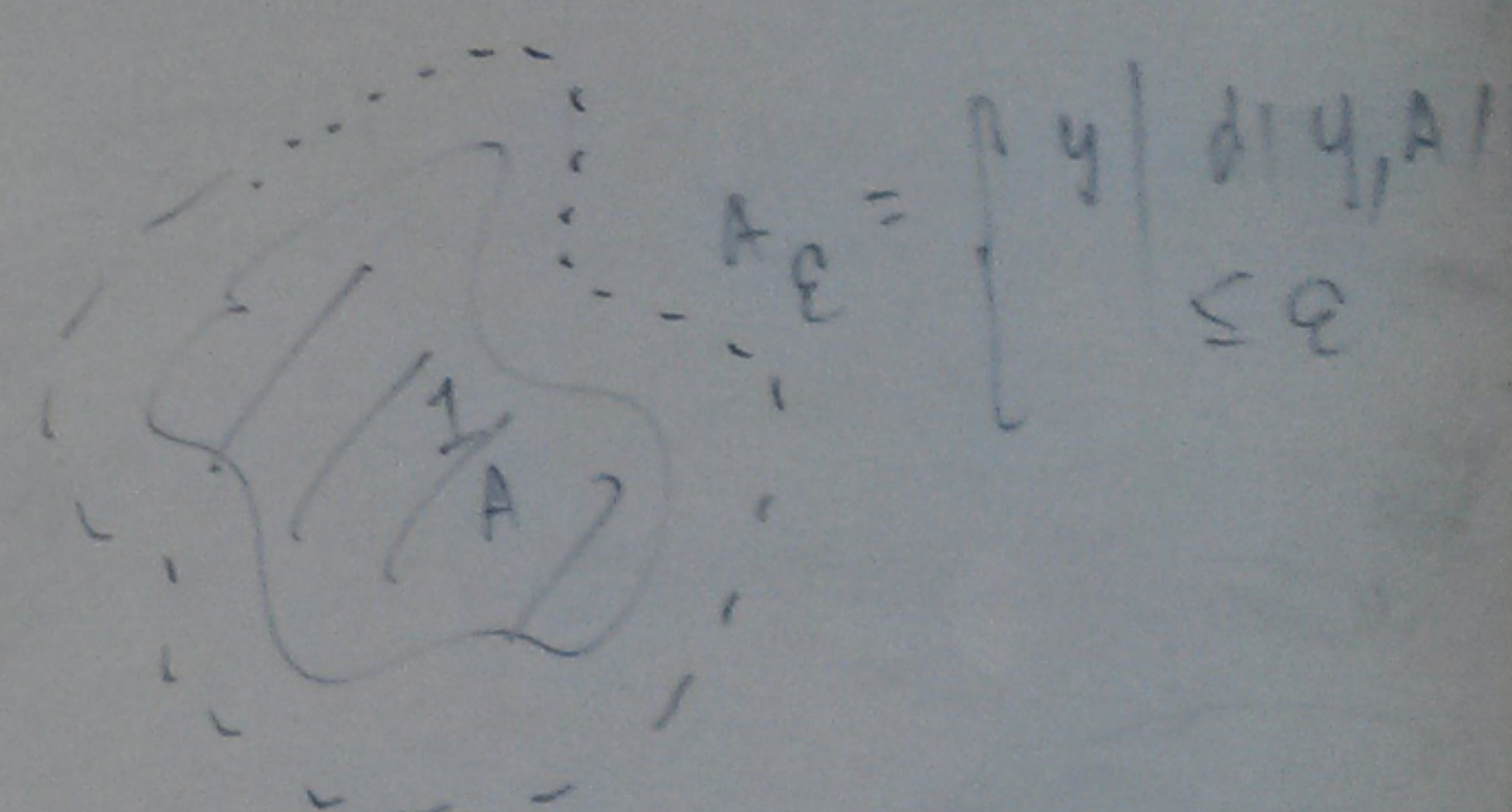
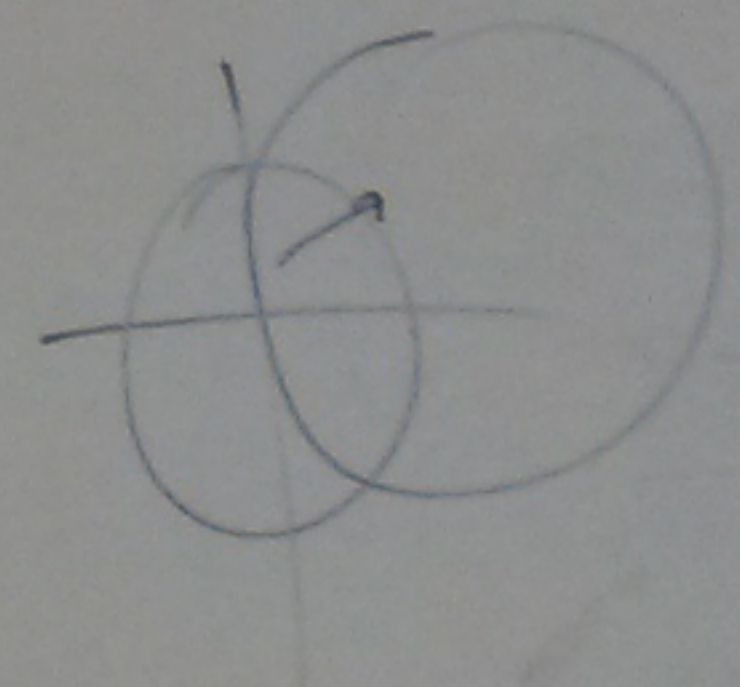
$$\frac{L(\gamma)^2}{4\pi} - A(\gamma) = \frac{1}{4} \int_0^\pi r^2 (\dot{\theta} - 1)^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^\pi (\dot{r}^2 - r^2) dt$$

$\geq 0 \qquad \qquad \geq 0 \quad (\text{Wirtinger})$

Es, il, lkr sağ, lkr sağ,

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 1 \\ \Rightarrow \theta = t + D \end{cases} + \begin{cases} r = c \sin(t) \end{cases}$$

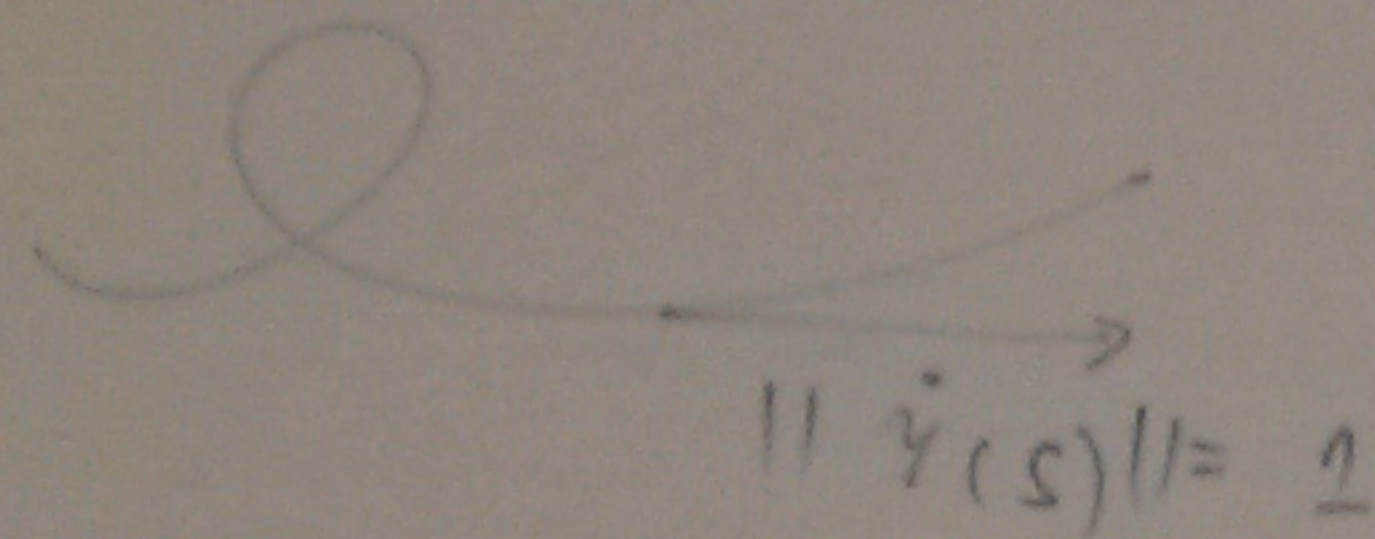
$$\begin{aligned} \Rightarrow \gamma(t) &= c (\sin t \cos(t+D), \sin t \sin(t+D)) \\ &= \frac{c}{2} (\sin(2t+D), -\cos(2t+D)) + \frac{c}{2} (\sin D, \cos D) \end{aligned}$$



$$= \frac{c}{2} \left(\sin(2t+D), -\cos(2t+D) \right) + \frac{c}{2} \left(\sin(2t+D), -\cos(2t+D) \right)$$

Tartışma Düzlemde eğriler için eğrilik.

$\gamma \subset \mathbb{R}^2$ Birim hız.



0 zaman oyub bir $\varphi(s)$ var ki

$$\dot{\gamma}(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$$

$\varphi(s)$ yerine $\varphi(s) + 2\pi n$ koyarsak, yine de sağlar.

Theorem $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ birim hız düzgün eğri. 0 zaman,

$$\gamma(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$$

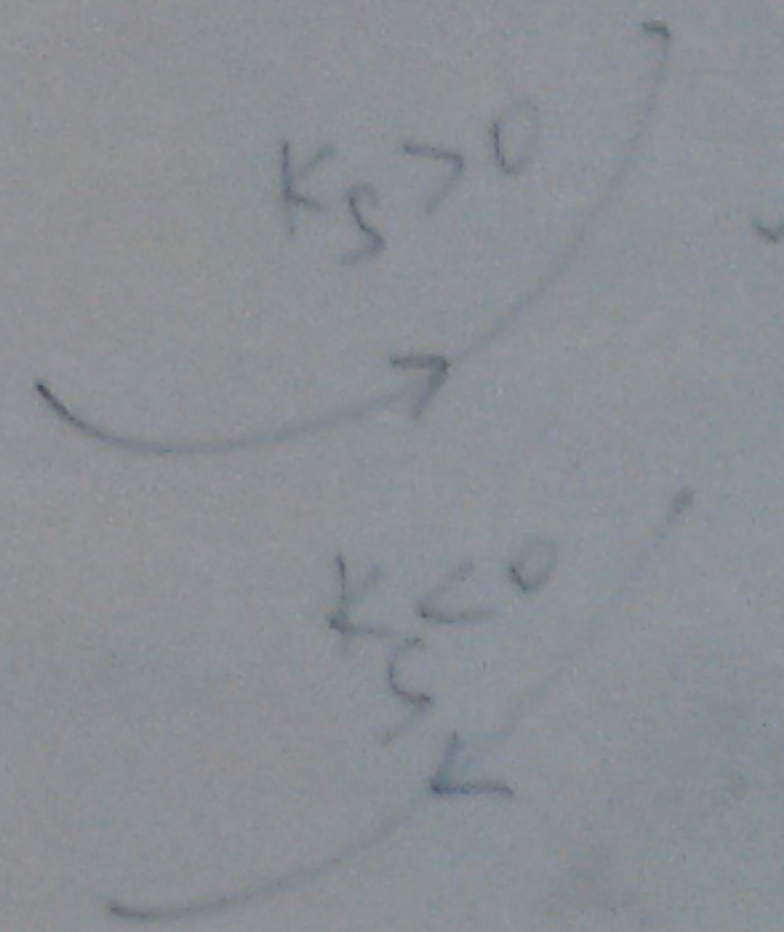
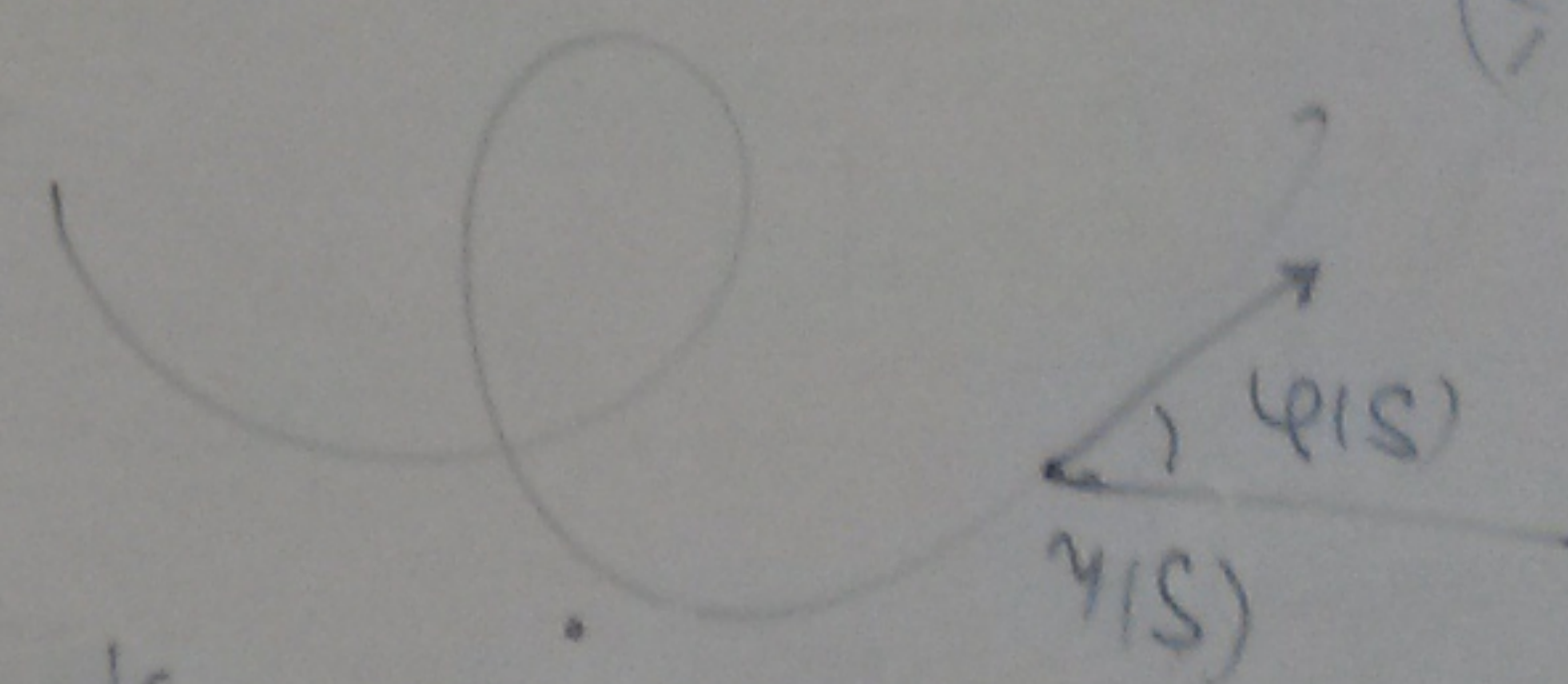
sağlayan düzgün bir fonksiyon

φ var. Ayrıca, $\varphi(0) = \lambda$

şart koyarsak, böyle de bir

fonksiyon var.

Not Bu φ fonksiyon Turning Angle (Çevirme Açı)



Tanım

$$k_s := \varphi'(s)$$

İşareti eğrilik denir.

Lemma

$$|k_s| = k$$

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} \sin t \cos t dt$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sin t \cos t \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{dF}{dt} \right) dt \geq 0 \quad \int_0^1 F dt \geq 0$$

$$\text{if } \dot{F} \geq 0 \Rightarrow \frac{dF}{dt} \geq 0 \Rightarrow F \geq 0$$

Problem

$\gamma: \text{Bogen } \text{in } \mathbb{R}^2$

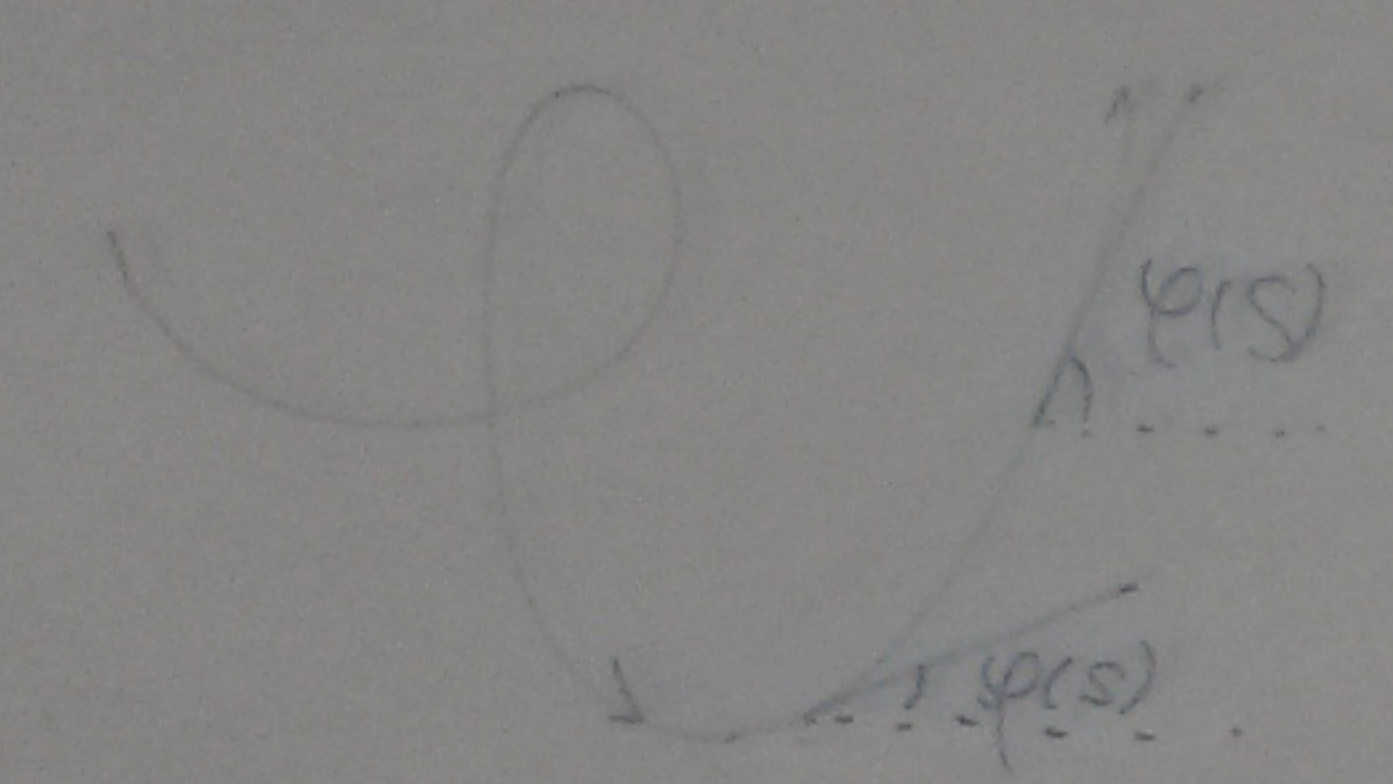
$$|\dot{\gamma}| = \|\dot{\gamma}\|$$

$$\dot{\gamma} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

$$|\dot{\gamma}| = 1$$

$$\text{mit: } \ddot{\gamma} = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$$

$$\Rightarrow \|\ddot{\gamma}\| = \|\dot{\gamma}\| = 1$$



ke

bu