

Hatırlatma

Tanım Eğri : $\mathcal{C} = \{ \gamma(t) : t \in (\alpha, \beta) \}$
(Parametrik)
 $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$

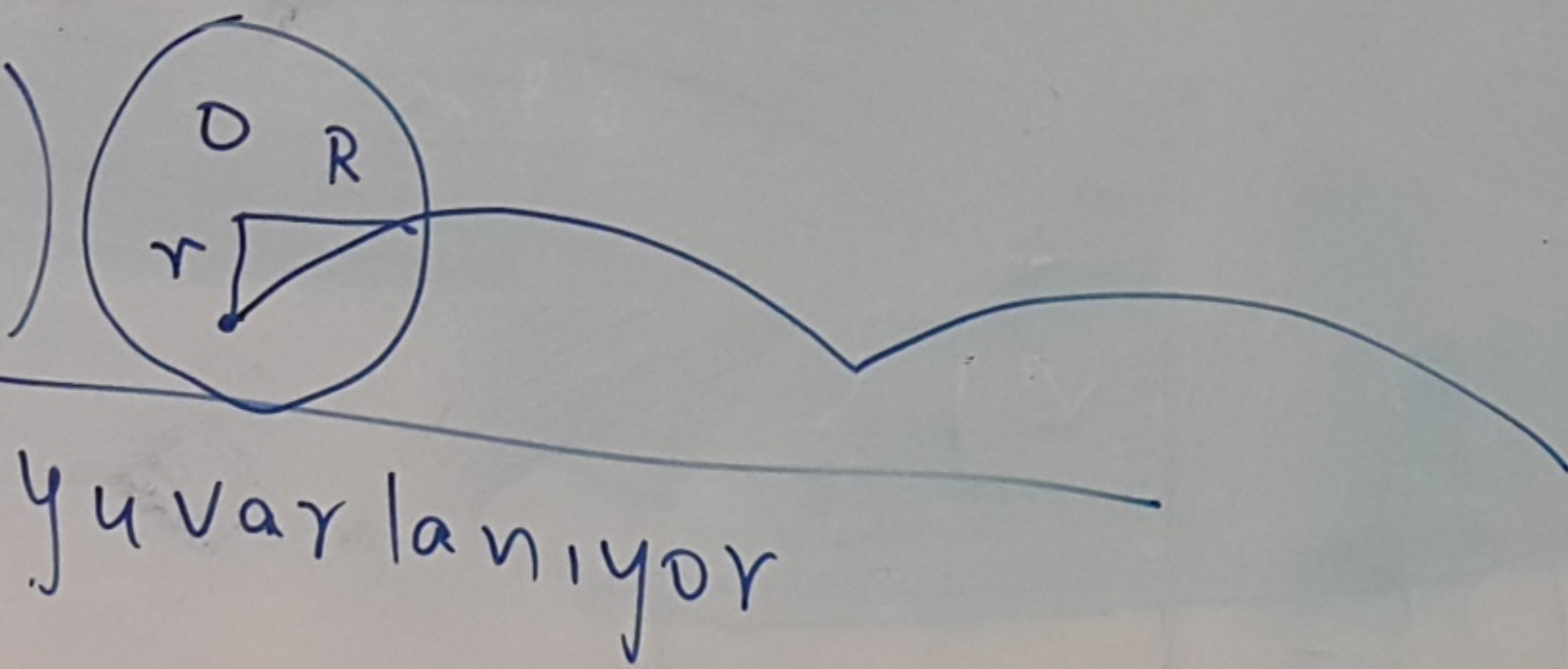
Genelde γ : Düzgün olacak
(sonsuz defa türevlenebilir)

Örnek 1) Cycloid

Bir Çark (yarı çapı)

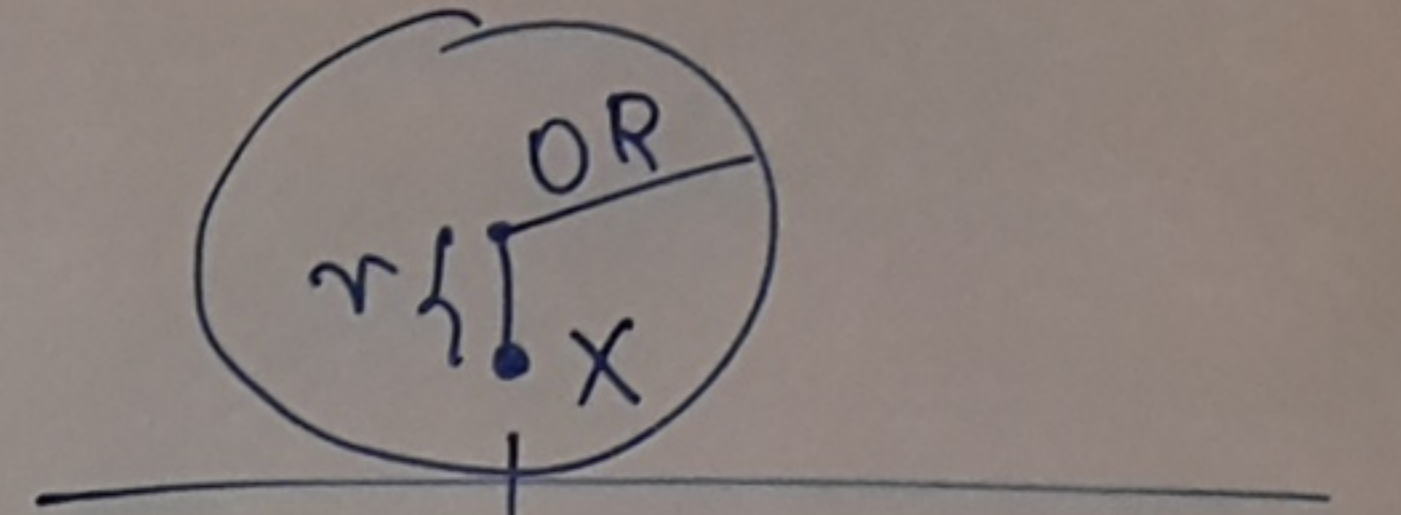
R

x -eksen üzerinde

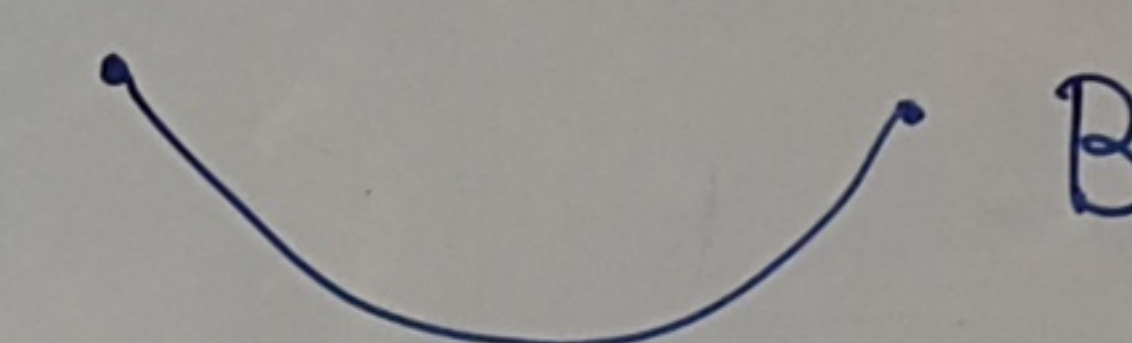


Merkez'den r uzaklık olan
bir noktanın yolu. ①

$x=0$: Nokta
 $(0, R-r)$ 'de



$$\mathcal{C} = \left\{ \left(t + r \cos\left(\frac{t}{R}\right), -r \sin\left(\frac{t}{R}\right) \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

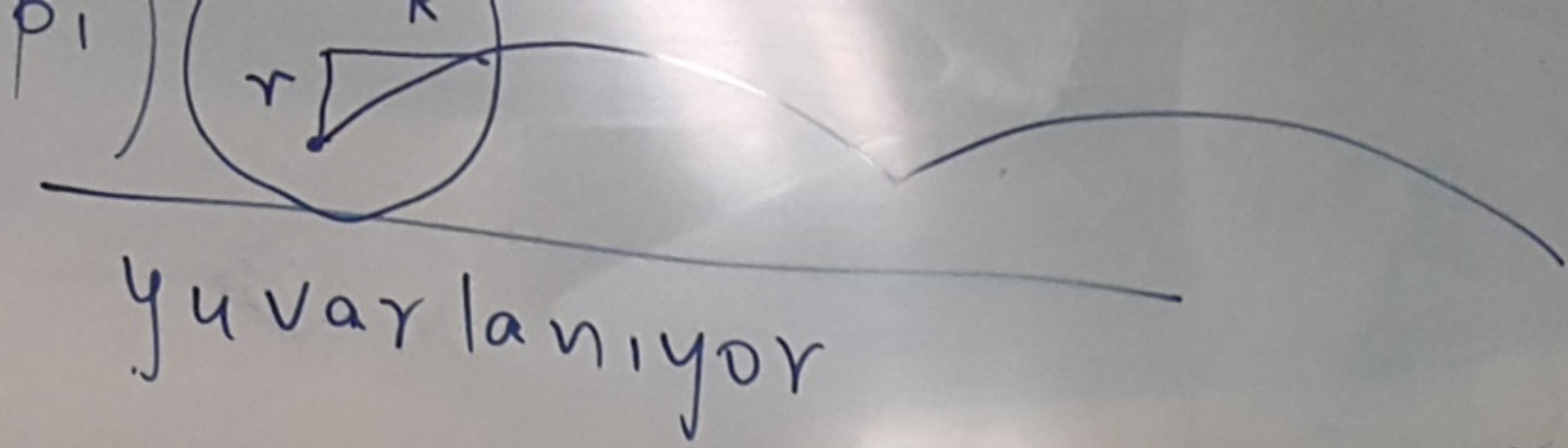
2) A  B

$$\mathcal{C} = \{ (t, \cosh t) : t \in \mathbb{R} \}$$

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

A, B : Aynı
yükseklik'te
A - B arasında
bir zincir
bağlayalım.
CATENARY

bir çark (yarı çapı R)
 x -eksen üzerinde yuvarlanıyor

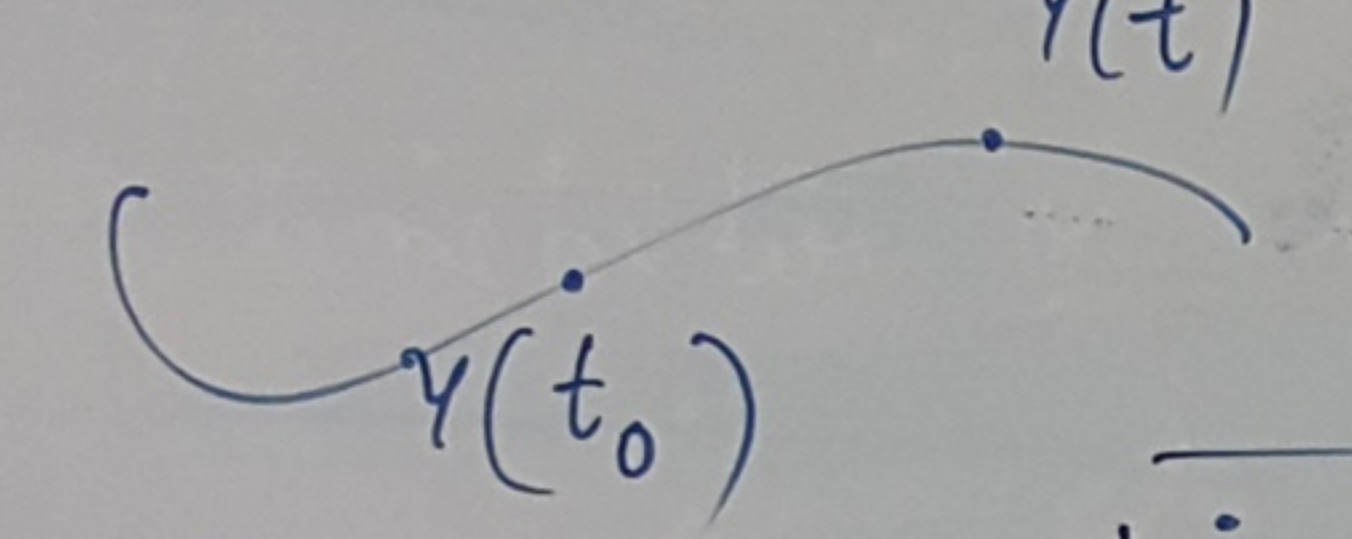


$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

bir zincir
 bağlayalım.
 CATENARY

Tanım (Yay uzunluğu)

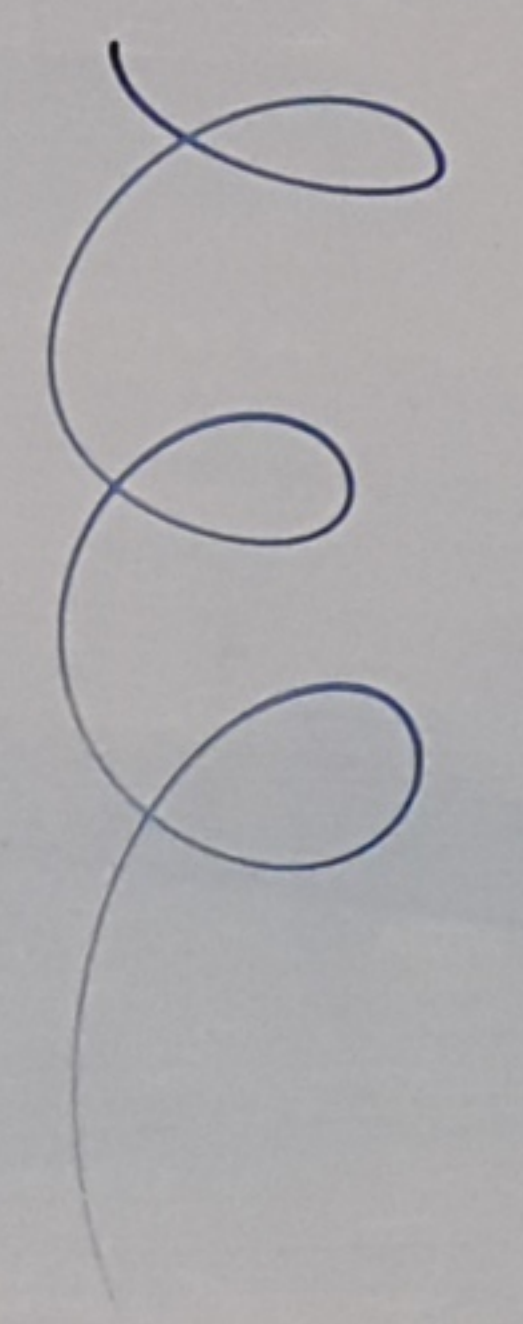
$$C = \{ \gamma(t) : t \in (\alpha, \beta) \} : \text{Eğri}$$

$$t_0 \in (\alpha, \beta)$$


$$s(t) := \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(u)\| du$$

$\dot{\gamma}(u) := \frac{d\gamma}{du}$

Örnek



Heliks

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1}$$

$\gamma(0)$ ve $\gamma(t)$ arasındaki

yay uzunluğu

$$\int_0^t \|\dot{\gamma}(u)\| du = \int_0^t \sqrt{2} du = \sqrt{2} \cdot t$$

Tanım (Regular Parametrizasyonu)

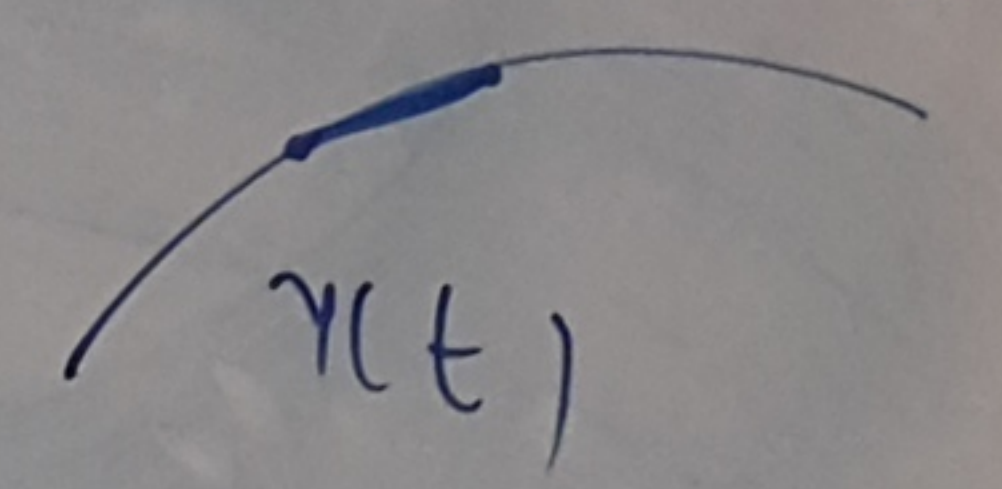
Eğer $\|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0 \forall t$

γ : Regular parametrizasyonu denir.

Not

$\dot{\gamma}(t)$: $\gamma(t)$ noktasındaki teğet vektörü.

$\gamma(t+\Delta t)$



$$\gamma(t+\Delta t) - \gamma(t) \approx \dot{\gamma}(t) \cdot \Delta t$$

$$du = \dot{\phi}(t) dt \quad \phi(a)$$

Theorem $\mathcal{C}$: Bir eğri olsun.

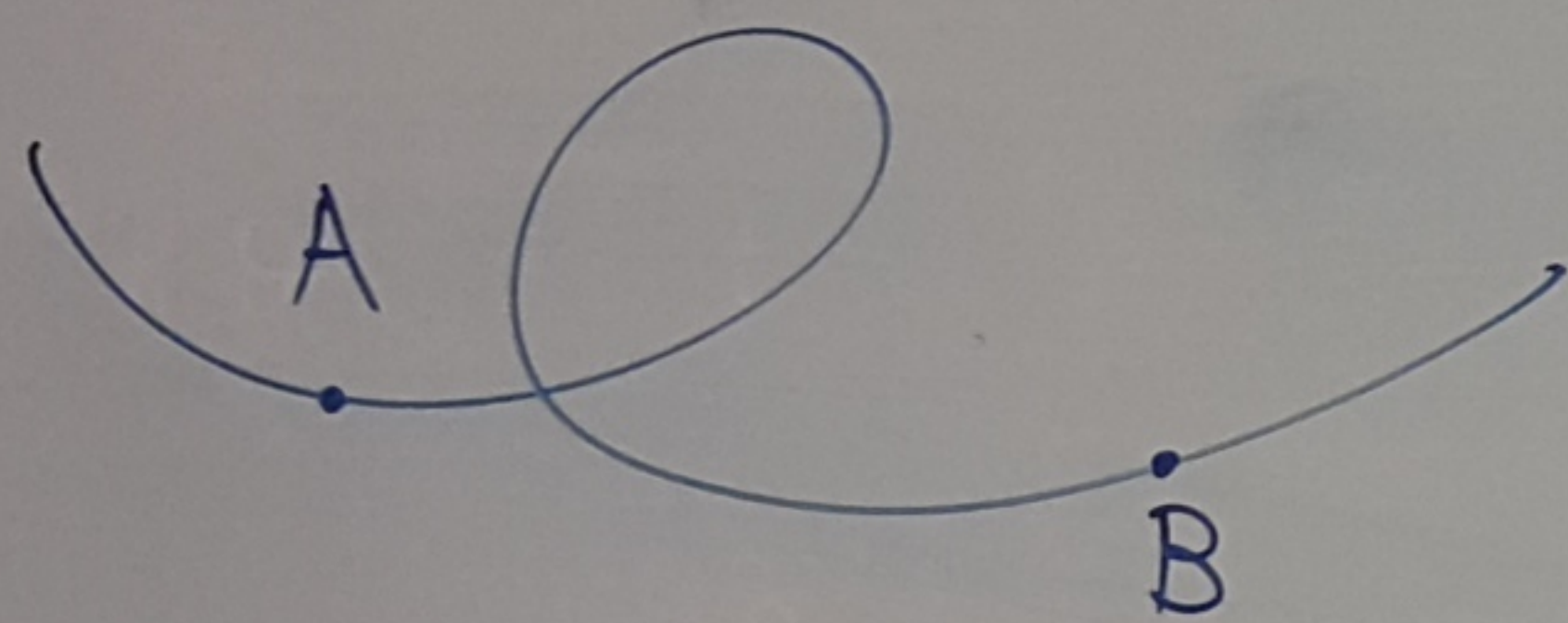
γ_1, γ_2 iki düzgün parametrisasyonu olsun.

0 zaman yay - uzunluğu hesabı parametrisasyonuna göre değişmez.

İspat

$$\gamma_1(a) = A$$

$$\gamma_1(b) = B$$



$$\gamma_2(c) = A$$

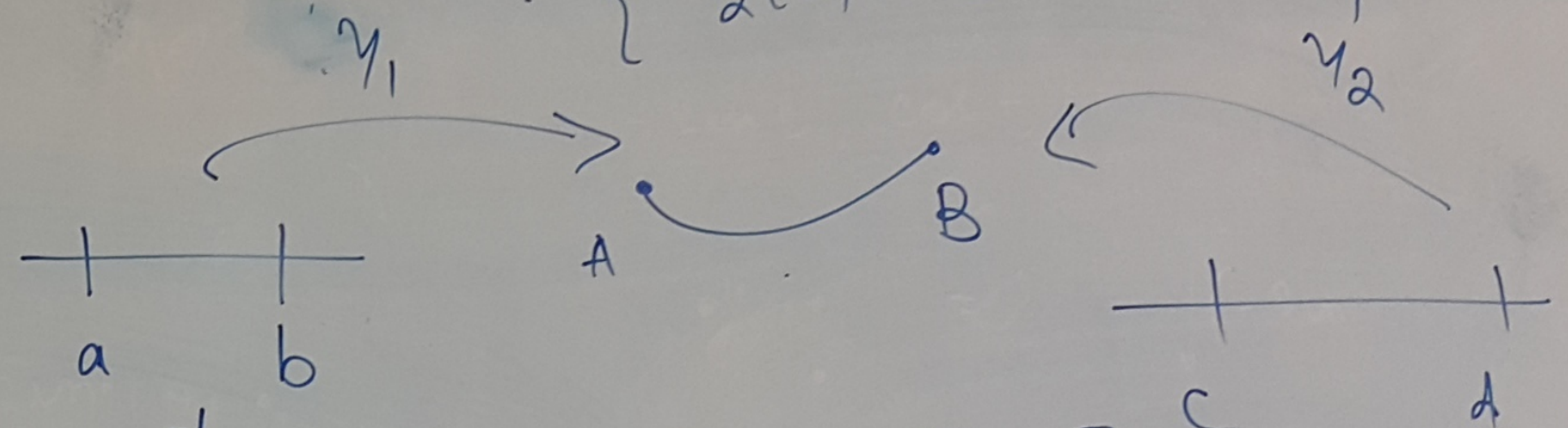
$$\gamma_2(d) = B$$

$$I = \int_a^b \|\dot{\gamma}_1(t)\| dt$$

Bunu ϕ diyelim (Düzgün)

$$J = \int_c^d \|\dot{\gamma}_2(t)\| dt$$

A-B parçası : $\{\gamma_1(t) : a \leq t \leq b\}$ 1-1
 $\{\gamma_2(t) : c \leq t \leq d\}$ ②



$$\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 : [a, b] \rightarrow [c, d]$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$$

$$I = \int_a^b \|\dot{\gamma}_1(t)\| dt$$

$$= \int_a^b \left\| \frac{d}{dt} (\gamma_2 \circ \phi) \right\| dt$$

Zincir kural $\frac{d}{dt} (\gamma_2 \circ \phi)(t) = \frac{d\gamma_2}{dt}(\phi(t)) \cdot \frac{d\phi(t)}{dt}$

$$= \int_a^b \|\dot{\gamma}_2(\phi(t))\| \|\dot{\phi}(t)\| dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} \|\dot{\gamma}_2(u)\| du$$

$u = \phi(t)$
 $du = \dot{\phi}(t) dt$

$$= \int_c^d \|\dot{\gamma}_2(u)\| du = J.$$

(4)

Sonuç

Zincir kural $\Rightarrow$

γ y uzunluğu

Parametrizasyonu'ndan
bağımsız.

Tartışma

Yay uzunluğu bir parametrizasyonu verir

$$\mathcal{C} = \left\{ \gamma(t) : t \in (\alpha, \beta) \right\} \quad \text{OE}(\alpha, \beta)$$

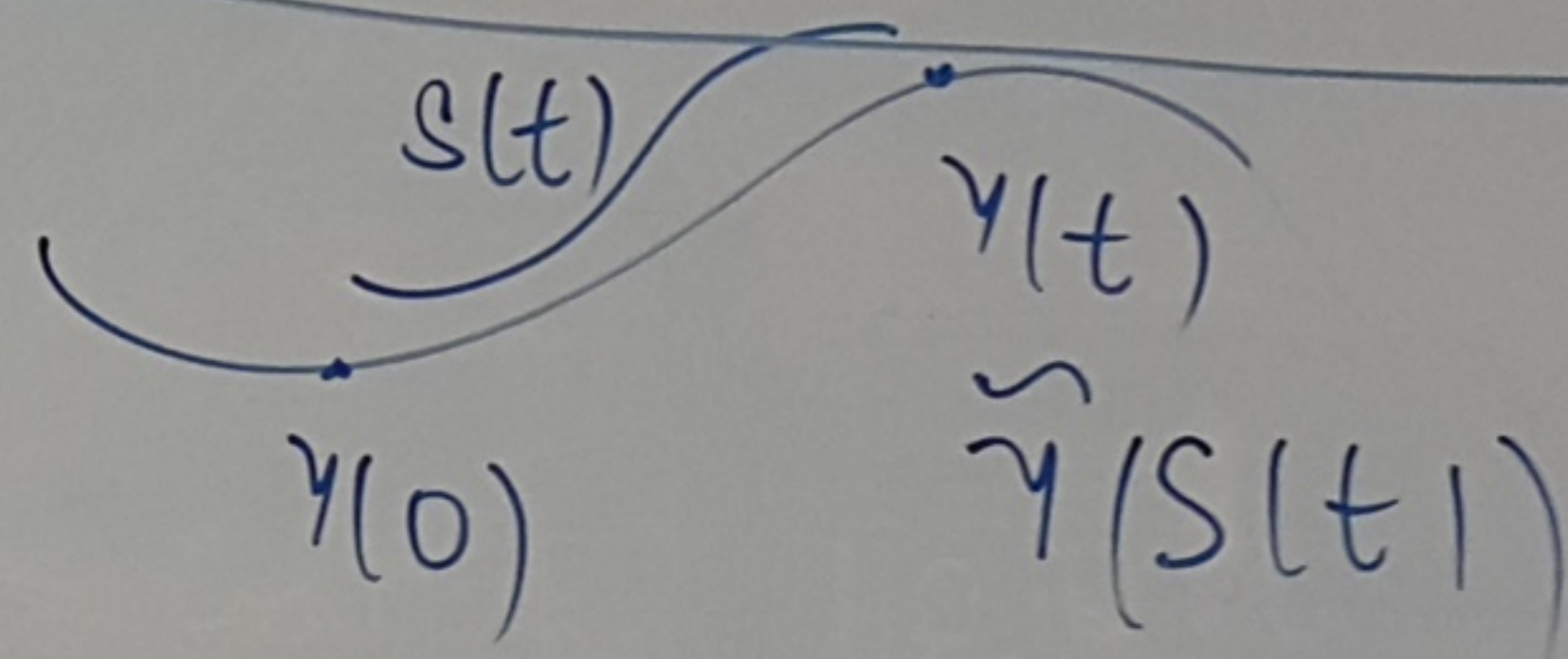
Yeni Bir parametrizasyonu

$\tilde{\gamma}(t)$: $\mathcal{C}$ üzerinde
yay uzunluğu t
olan noktası

Hesaplama

$$\int_0^t \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| dt = t$$

$$\begin{cases} \tilde{\gamma}(s(t)) := \gamma(t) \\ \Leftrightarrow \tilde{\gamma}(t) := \gamma(s^{-1}(t)) \end{cases}$$



$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \dot{\gamma}(s^{-1}(t)) \frac{ds^{-1}(t)}{dt}$$

Yay-uzunluğu
parametrizasyonu

$$s \circ s^{-1}(t) = t$$

$$\frac{ds}{dt}(s^{-1}(t)) \cdot \frac{ds^{-1}}{dt}(t) = 1$$

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(s^{-1}(t)) \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| = \frac{\|\dot{\gamma}(s^{-1}(t))\|}{\left| \dot{s}(s^{-1}(t)) \right|}$$

$$s(t) = \int_t^{\dot{s}(s^{-1}(t))} \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$$

Lemma $\mathcal{C} = \{ \gamma(t) : t \in (\alpha, \beta) \}$ (6)

Yay-uzunluğunu kullanarak
yeni bir par. verelim

$$\tilde{\gamma}(t) := \gamma(s^{-1}(t))$$

0 zaman,

$$\|\dot{\tilde{\gamma}}\| = 1$$

Demek ki, Eğri üzerinde sabit hız 1
ile hareket ediyoruz.

2 Eğrilik

—*—*— Eğrilmiyor

$\gamma(t+\Delta t)$
↓
? $\gamma(t)$ $\dot{\gamma}(t)$ Eğriliyor

$$\gamma(t+\Delta t) = \gamma(t) + \dot{\gamma}(t) \cdot \Delta t + \ddot{\gamma}(t) \frac{(\Delta t)^2}{2} + O((\Delta t)^3)$$

$\gamma(t+\Delta t) - \gamma(t)$ ve $\dot{\gamma}(t)$ arasındaki aç, $\leftarrow ?$

Lemma 2.1

Eğer γ bir birim hız eğri ise

ic $\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle = 0$
Çarpım $\nearrow$

İspat

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$$

$$\Rightarrow \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 1$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow 2 \langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle = 0$$

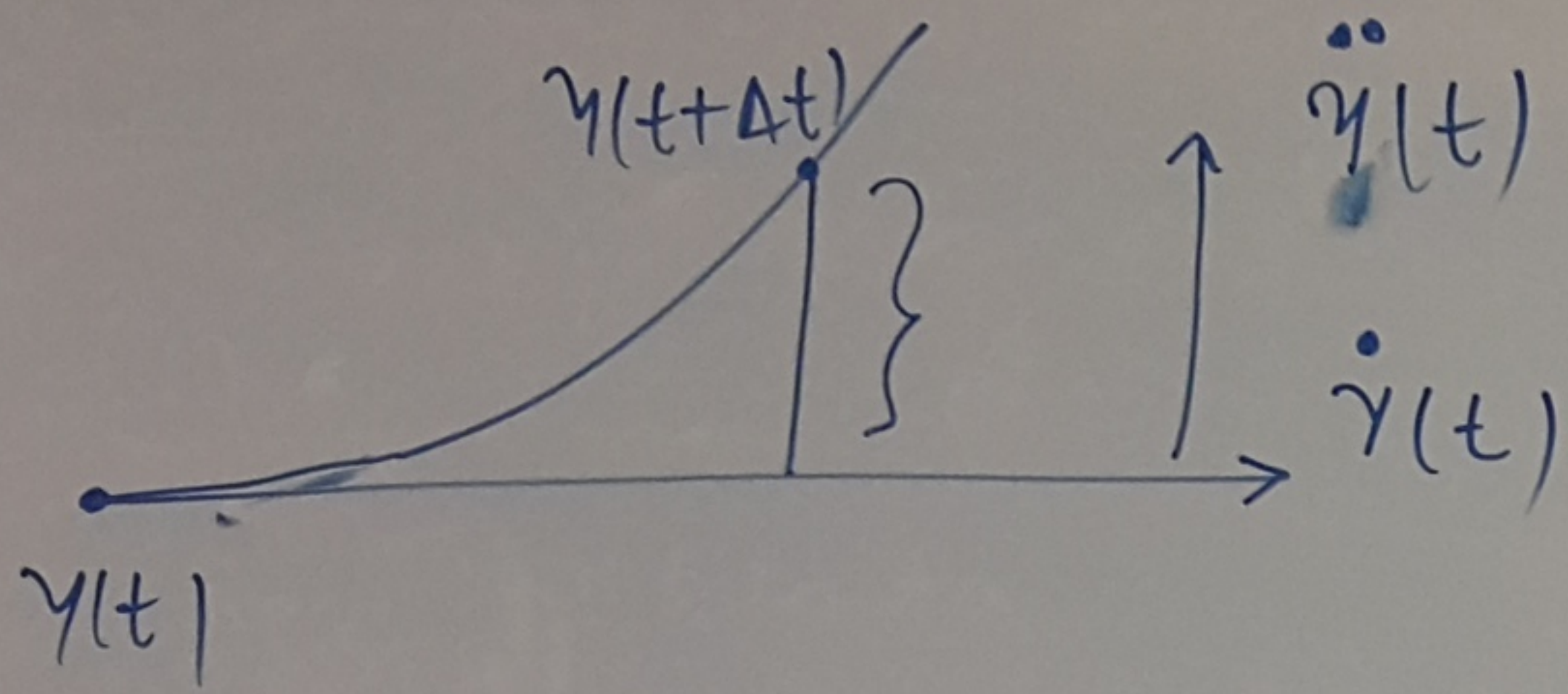
$$\dot{\gamma} = (f_1, \dots, f_k)$$

$$\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \sum f_i^2$$

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \sum 2f_i \frac{df_i}{dt}$$

$$= 2 \langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle$$

Eğer γ bir birim hız eğri ise
 $\langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle = 0$



γ : Birim Hız

$$\gamma(t+\Delta t) - \gamma(t) = \dot{\gamma}(t) \Delta t + \frac{\ddot{\gamma}(t) (\Delta t)^2}{2} + \text{küçük}$$

$$\langle \gamma(t+\Delta t) - \gamma(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle = \langle \ddot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle \frac{(\Delta t)^2}{2} + \text{küçük}$$

Eğrilik için
 uygun bir ifade

Tanım 2.2

γ : Birim hız eğri ise,
 $\kappa(t)$: $\gamma(t)$ nokta'nın eğrilik

Tanım 2.2 (Devam)

$$\kappa(t) := \|\ddot{\gamma}(t)\|$$

Örnek 2.3.1

$$c = \{(R \cos t, R \sin t) : t \in [0, 2\pi)\}$$

$$\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$$

$$\dot{\gamma}(t) = (-R \sin t, R \cos t)$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = R$$

Birim hız değil

Proposition 2.4

$$C = \{ \gamma(t) : t \in (\alpha, \beta) \} \subset \mathbb{R}^3$$

Birim hız olmayan bir eğri
0 zaman

$$K = \frac{\| \ddot{\gamma} \times \dot{\gamma} \|}{\| \dot{\gamma} \|^3}$$

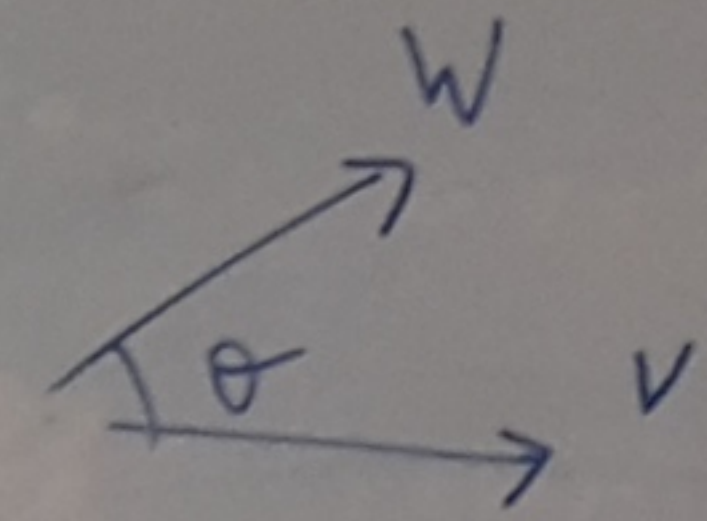
$$V = (a_1, b_1, c_1)$$

$$W = (a_2, b_2, c_2)$$

Hatırlatma.

(10)

$$V \times W = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$



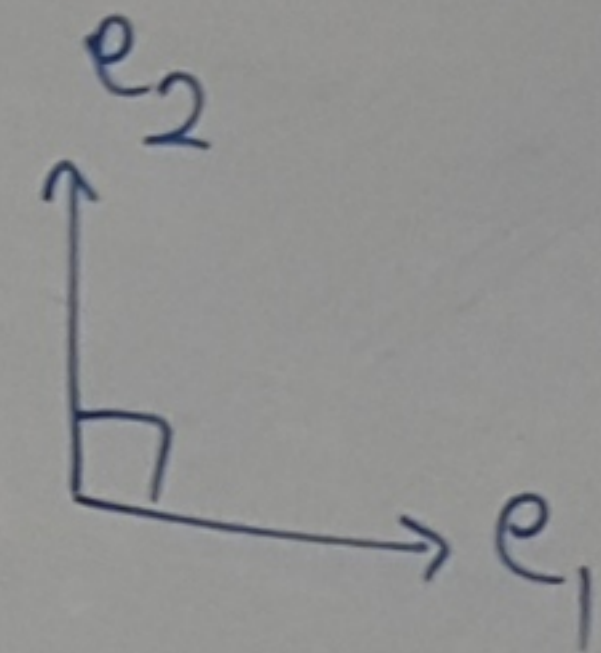
$$= (b_1 c_2 - c_1 b_2, c_1 a_2 - a_1 c_2, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$V \times W$: Hem V , Hem W

ile dik

Uzunluk: $\|V\| \|W\| \sin \theta$

Yon: Sağ Başparmak
Kural



$$e_1 \times e_2 = e_3$$

$$e_2 \times e_1 = -e_3$$

$\mathbb{R}^3$ için birim hız
parametrizasyonu

$$\vec{v}(t) = \left(R \cos\left(\frac{t}{R}\right), R \sin\left(\frac{t}{R}\right) \right)$$

$$\dot{\vec{v}}(t) = \left(-\sin\left(\frac{t}{R}\right), \cos\left(\frac{t}{R}\right) \right)$$

$$\ddot{\vec{v}}(t) = \left(-\cos\left(\frac{t}{R}\right) \cdot \frac{1}{R}, -\sin\left(\frac{t}{R}\right) \cdot \frac{1}{R} \right)$$

$$\|\ddot{\vec{v}}(t)\| = \frac{1}{R} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Yarı çapı Büyük} \\ \Rightarrow \text{Eğrilik küçük} \end{array} \right)$$

Örnek 8.3.2

Heliks

$$\left\{ \left(\cos \frac{t}{\sqrt{2}}, \sin \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Eğrilik } \kappa(t) = \frac{1}{2}$$

Birim hız olmayan
eğri için eğrilik.

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$$

9

9

Prop 2.4 (İspat)

$$\tilde{\gamma} := \gamma \circ s^{-1}$$

Birim hız
parametrizasyonu

$$\tilde{\gamma} \circ s = \gamma$$

$\gamma(t)$ noktasında Eğrilik

$$k = \left\| \frac{d^2}{dt^2} (\tilde{\gamma} \circ s) \right\|$$

...

9

Prop 2.4 (İspat)

$$\tilde{\gamma} := \gamma \circ s^{-1}$$

Birim hız
parametrizasyonu

$$\tilde{\gamma} \circ s = \gamma$$

$\gamma(t)$ noktasında Eğrilik

$$k = \left\| \frac{d^2}{dt^2} (\tilde{\gamma} \circ s) \right\|$$

...