$F \equiv 0 \quad G \equiv f(u)$

Sonuç 6

Düzlemde bütün geodezikler doğru parçalarıdır.

Küre: Büyük çember parçaları.

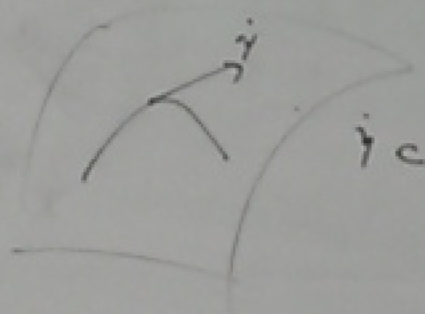
Geodezikler

①

Tanım 1 $\gamma \subset S$

Eğri Yüzey

$\ddot{\gamma}$'nın T_pS üzerindeki izdüşüm $\equiv 0$ ise γ geodezik denir.



$\dot{\gamma} \subset T_pS$

Hesaplama 2

γ : Birim hız

$\Rightarrow \dot{\gamma} \perp \ddot{\gamma}$

$$\ddot{\gamma} = \underbrace{\kappa_n}_{\text{Normal Eğrilik}} N + \underbrace{\kappa_g}_{\text{Geodezik Eğrilik}} N \times \dot{\gamma}$$

Geodezik $\Leftrightarrow \kappa_g \equiv 0$ (Birim hız eğriler için)

Hatırlatma 3 Geodezik Denklemler.

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

birinci temel form olsun.

Birim hız γ geodezik ancak ve ancak

$$\frac{d}{dt}\left(E\dot{u} + F\dot{v}\right) = \frac{1}{2}\left(E_u \dot{u}^2 + 2F_u \dot{u}\dot{v} + G_u \dot{v}^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(F\dot{u} + G\dot{v}\right) = \frac{1}{2}\left(E_v \dot{u}^2 + 2F_v \dot{u}\dot{v} + G_v \dot{v}^2\right)$$

$\longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \sigma(u,v) = (u,v)$

$du^2 + dv^2 \quad E \equiv G \equiv 1 \quad F \equiv 0$

Burada denklemler: $\frac{d}{dt}(\dot{u}) \equiv 0 \quad \frac{d}{dt}(\dot{v}) \equiv 0$

$$\ddot{\gamma} = \kappa_n N + \kappa_g N \times \dot{\gamma}$$

Normal Eğrilik — Geodezik Eğrilik

Geodezik $\Longleftrightarrow$ $\kappa_g \equiv 0$ (Birim hız eğriler için)

$$\frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_v \dot{u}^2 + 2F_v \dot{u}\dot{v} + G_v \dot{v}^2)$$

$\to \mathbb{R}^2$ $\quad \sigma(u,v) = (u,v)$

$du^2 + dv^2 \quad E \equiv G \equiv 1 \quad F \equiv 0$

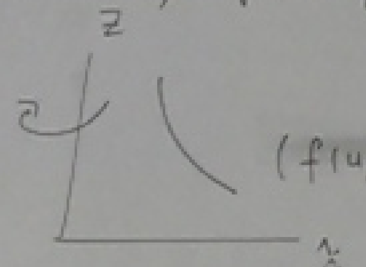
Burada denklemler: $\frac{d}{dt}(\dot{u}) = 0 \quad \frac{d}{dt}(\dot{v}) = 0$

2

$\Rightarrow (u,v) = (\alpha,\beta) + t(\gamma,\delta)$

Doğru parçası.

Hatırlatma 4 Çevirilmiş yüzeyler



$(f(u), 0, g(u))$

$\sigma(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$

Birinci Temel formu: $du^2 + f(u)\,dv^2$

$E \equiv 1 \quad F \equiv 0 \quad G \equiv f(u)$

Bunlar için Geodezik denklemler

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\dot{u}) = \frac{1}{2}\dot{f}\dot{v}^2, \quad \frac{d}{dt}(f\dot{v}) = 0.}$$

Theorem 5 $S \subset \mathbb{R}^3$ düzgün regular yüzey $p \in S$, $v \in T_p(S)$.

O zaman, $\gamma(0) = p$ ve $\gamma'(0) = v$ sağlayan tek bir geodezik var.

Sonuç 6 Düzlemde bütün geodezikler doğru parçalarıdır.

Küre: Büyük çember parçaları.

Not: $\frac{\partial u}{\partial \tau}(0) = 0 = \frac{\partial u}{\partial \tau}(1)$

$\frac{\partial v}{\partial \tau}(0) = 0 = \frac{\partial v}{\partial \tau}(1)$

$\tau = 0$ ise $\gamma^\tau = \gamma$

γ, birim hız.

$\to \quad g(0,t) = 1$

geodezik ise, mesafe ölçüm olarak yerel minima dır.

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{2}\left(E_v \dot u^2 + 2F_v \dot u \dot v + G_v \dot v^2\right) - \frac{d}{dt}\left(F\dot u + G \dot v\right)\right] \frac{\partial v}{\partial \tau}\, dt$$

Geodezik denklemler!!

Sonuç: $\boxed{\gamma \text{ bir geodezik ise, } \frac{dl}{d\tau}(0) = 0.}$

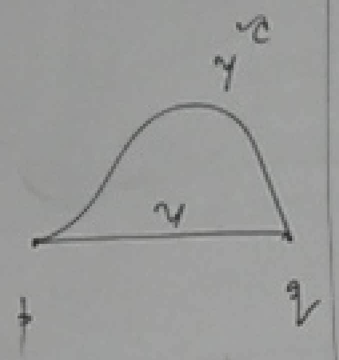
$\gamma(0) = p$ ve $\gamma(1) = q$ sağlayan bir düzgün regular eğri olsun.

Varsayalım:

(1) $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ için γ^τ eğri var ve her τ için $\gamma^\tau(0) = p$, $\gamma^\tau(1) = q$ ve $\gamma^0 = \gamma$.

(2) $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \longrightarrow S$, $(\tau, t) \mapsto \gamma^\tau(t)$ Düzgün dür.

(3) γ birim hız eğri olsun.



$$l(\tau) := \int_0^1 \|\dot\gamma^\tau\| dt \quad (\gamma^\tau\text{'nın uzunluğu})$$

Bunun minimumu '0' noktada olsun.

$$\Rightarrow \left.\frac{dl}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0$$

(3)

$$\frac{d}{d\tau}\int_0^1 \|\dot\gamma^\tau\| dt = \int_0^1 \frac{d\|\dot\gamma^\tau\|}{d\tau} dt$$

$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \longrightarrow$ Birinci Temel Formu

$$\|\dot\gamma^\tau\| = \left(E\dot u^2 + 2F\dot u\dot v + G\dot v^2\right)^{1/2} \qquad \gamma^\tau(t) = \sigma(u^\tau(t), v^\tau(t))$$

Not: u, v, E, F, G: t ve τ ile bağlı.

$$\int_0^1 \frac{d}{d\tau}\Big(\underbrace{E\dot u^2 + 2F\dot u\dot v + G\dot v^2}_{g(t,\tau)}\Big)^{1/2} dt = 0$$

$$\frac{dg}{d\tau} = \left(E_u \dot u^2 + 2F_u \dot u\dot v + G_u \dot v^2\right)\frac{\partial u}{\partial \tau} + \left(E_v \dot u^2 + 2F_v \dot u \dot v + G_v \dot v^2\right)\frac{\partial v}{\partial \tau}$$
$$+ \left(2E\dot u \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} + 2F\dot v \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial \tau} + 2F\dot u \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \tau} + 2G\dot v \frac{\partial^2 v}{\partial t\partial \tau}\right)$$

③ γ birim hız eğri olsun.

$$\ell(\tau) := \int_0^1 \|\dot{\gamma}^{\tau}\| dt \quad \left(\gamma^{\tau}\text{'nın uzunluğu}\right)$$

Bunun minimum'u '0' noktada olsun.

$$\Rightarrow \left.\frac{d\ell}{d\tau}\right|_{\tau=0} = 0$$

$$g(t,\tau)$$

$$\frac{dg}{d\tau} = \left(E_u \dot{u}^2 + 2F_u \dot{u}\dot{v} + G_u \dot{v}^2\right)\frac{\partial u}{\partial \tau} + \left(E_v \dot{u}^2 + 2F_v \dot{u}\dot{v} + G_v \dot{v}^2\right)\frac{\partial v}{\partial \tau}$$

$$+ \left(2E\dot{u}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial \tau} + 2F\dot{v}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial \tau} + 2F\dot{u}\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial\tau} + 2G\dot{v}\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial \tau}\right)$$

④

$$\frac{1}{2}\int_0^1 g(t,\tau)^{-1/2}\left[2E\dot{u}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial\tau} + 2F\dot{u}\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial\tau} + 2F\dot{v}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial\tau} + 2G\dot{v}\frac{\partial^2 v}{\partial t\partial\tau}\right]dt$$

Bunu İnceyelelim.

Not. $\frac{\partial u}{\partial \tau}(0) = 0 = \frac{\partial u}{\partial \tau}(1)$

$\frac{\partial v}{\partial \tau}(0) = 0 = \frac{\partial v}{\partial \tau}(1)$

. $\tau = 0$ ise $\gamma^{\tau} = \gamma$

γ, Birim hız.

$\rightarrow \quad g(0,t) = 1$

$$= \left. g(t,\tau)^{-1/2}\cancel{(E\dot{u}+F\dot{v})\frac{\partial u}{\partial\tau}}^{\,0} + g(t,\tau)^{-1/2}\cancel{(F\dot{u}+G\dot{v})\frac{\partial v}{\partial\tau}}^{\,0}\right|_0^1$$

$$- \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[g(t,\tau)^{-1/2}(E\dot{u}+F\dot{v})\right]\frac{\partial u}{\partial\tau}dt - \int_0^1\frac{d}{dt}\left[g(t,\tau)^{-1/2}(F\dot{u}+G\dot{v})\right]\frac{\partial v}{\partial\tau}dt.$$

Sonuç, γ bir geodezik ise, mesafe ölçüm olarak yerel minima dır.

Ayrıca, $g(t,0) = 1$

$$\frac{d\ell}{d\tau}(0) = \int_0^1\left[\frac{1}{2}\left(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2\right) - \frac{d}{dt}\left(E\dot{u}+F\dot{v}\right)\right]\frac{\partial u}{\partial\tau}dt$$

$$+ \int_0^1\left[\frac{1}{2}\left(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2\right) - \frac{d}{dt}\left(F\dot{u}+G\dot{v}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial\tau}dt$$

Geodezik denklemleri!!!

Sonuç: $\boxed{\gamma \text{ bir geodezik ise, } \frac{d\ell}{d\tau}(0) = 0.}$

Tersi de geçerli: $\frac{d\ell}{d\tau}(0) = 0$ ise, γ bir geodezik olmalı

$\Rightarrow \dot{v} \equiv 0$ ve $F_v \equiv 0$

$\gamma^v(t) = \sigma(t,v)$ v sabit

$\Rightarrow \dot{u} \equiv 1$

$\rightarrow \frac{d}{dt}(F) = 0 \Rightarrow F_u \dot{u} \equiv 0 \Rightarrow F_v \equiv 0.$

birinci temel formu

$du^2 + g(u,v)\,dv^2$ şeklindedir.

c) $g(0,v) = 1$

$\frac{\partial g}{\partial u}(0,v) = 0$?

5

Theorem 7 $S \subset \mathbb{R}^3$ düzgün regular yüzey $p,q \in S$. $\gamma \mid \gamma(0) = p$ ve $\gamma(1) = q$ sağlayan bir düzgün regular birim hız eğri olsun. O zaman bunlar birbirine denktir

a) γ bir geodeziktir

b) Her 'yakın' $\tilde{\gamma}(0) = p$, $\tilde{\gamma}(1) = q$ sağlayan eğri $\tilde{\gamma}$ için p ve q arasında γ üzerindeki mesafe $\tilde{\gamma}$ üzerindeki mesafeden küçüktür.

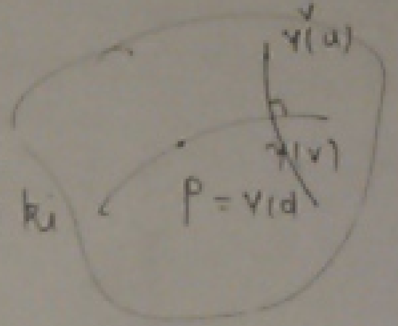
i.e. $\int_0^1 \|\dot{\gamma}\|\,dt \leq \int_0^1 \|\dot{\tilde{\gamma}}\|\,dt$

Geodezik Ko-ordinatlar

$\gamma \subset S$ birim hız geodezik olsun.

$\gamma = \gamma(v)$

Her v için, öyle bir birim hız geodezik γ^v bulalım ki ($\gamma^v = \gamma^v(u)$)



- $\gamma^v(0) = \gamma(v)$
- $(\gamma^v)'(0) \perp \gamma'(v)$

$\sigma(u,v) := \gamma^v(u)$ bizim parametrizasyon olacak.

Not a) $\sigma(u,v)$ 'p' noktanın etrafında düzgün regular parametrizasyondur. (Kapalı fonksiyon Teorem)

sağlayan eğ... $\tilde{\gamma}(1) = q$
... için
p ve q arasında ... üzerindeki
mesafe $\tilde{\gamma}$ üzerindeki mesafeden
küçüktür.

i.e. $\int_0^1 \|\dot{\gamma}\| dt \le \int_0^1 \|\dot{\tilde{\gamma}}\| dt$

$\gamma^v(0) = \gamma(v)$

$(\gamma^v)'(0) \perp \gamma'(v)$

$\sigma(u,v) := \gamma^v(u)$ kısım parametrizasyon olacak.

Not a) $\sigma(u,v)$ 'p' noktanın etrafında düzgün regular parametrizasyondur. (Kapalı fonksiyon Teorem)

b) Birinci Temel formu

$\longrightarrow \sigma_u(u,v) = \frac{d}{du}\gamma^v(u)$

Ama γ^v birim hızdır!

$\Rightarrow \left\|\frac{d}{du}\gamma^v(u)\right\| \equiv 1$

$\Rightarrow \|\sigma_u\| \equiv 1.$

i.e. $E := \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle \equiv 1.$

$\longrightarrow \frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2)$

$\gamma^v = \gamma^v(u)$ için bunu uygulayalım. (v sabit)

$\Rightarrow \dot{v} \equiv 0$ ve $E_v \equiv 0$

$\gamma^v(t) = \sigma(t,v)$ v sabit

$\Rightarrow \dot{u} \equiv 1$

$\rightarrow \frac{d}{dt}(F) \equiv 0 \Rightarrow F_u\dot{u} \equiv 0 \Rightarrow F_u \equiv 0.$

Aynı zamanda,

$F(0,v) = \langle \sigma_u(0,v), \sigma_v(0,v) \rangle$
$= 0$

çünkü γ^v ve γ $\sigma(0,v)$ noktada diktir.

$F_u \equiv 0 \Rightarrow F(u,v) = g(v)$ (bir g için)

Ama $F(0,v) = 0 \Rightarrow g(v) = 0.$

Sonuç: $F \equiv 0.$

Demek, geodezik ko-ordinatlar kullansak, birinci temel formu

$du^2 + g(u,v)\,dv^2$ şeklindedir.

c) $g(0,v) = 1$

$\frac{\partial g}{\partial u}(0,v) = 0$?

$\frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2)$

$\frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2)$

Janos Bolyai ~1830'lar
Lobachevsky ~1830'lar

Gaussian Eğrilik: K

Hatırlatma: $(B(0,R))$: küre

$$K = \frac{1}{R^2}$$

<u>Soru</u> $\alpha \in \mathbb{R}$. Öyle bir yüzey veriniz ki $K \equiv \alpha$.

$\alpha > 0$: Küre (yarıçapı $\equiv \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$)

$\alpha = 0$: Düzlem.

$\alpha = -1$? $\longrightarrow$ sanki $\sqrt{-1}$ yarıçaplı olan bir küre.

<u>Hatırlatma</u> Çevirilmiş yüzeyler:

$$K = -\frac{\ddot{f}}{f}$$

$$\sigma(u,v) = (f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ g(u))$$

$(f,0,g)$: Birim hızlı eğri $\Rightarrow (\dot{f})^2 + (\dot{g})^2 \equiv 1$

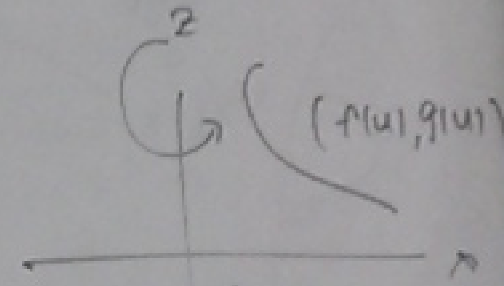
Eğer $K = -1$ ise,

$\ddot{f} = f \Rightarrow f = e^u$ bir çözümdür.

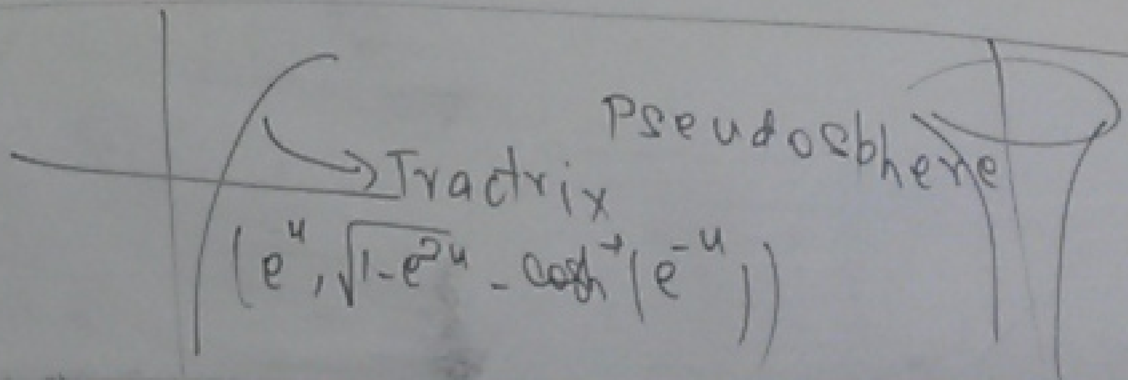
$$(\dot{g})^2 = 1 - e^{2u}$$

$$\Rightarrow \dot{g} = \sqrt{1-e^{2u}}$$

$$\Rightarrow g = \int \sqrt{1-e^{2u}}\,du = \sqrt{1-e^{2u}} - \cosh^{-1}(e^{-u})$$



<u>Çözüm</u> $$\boxed{\sigma(u,v) = \left(e^u \cos v,\ e^u \sin v,\ \sqrt{1-e^{2u}} - \cosh^{-1}(e^{-u})\right)}$$



olan bir küre.

Hatırlatma: Çevrilmiş yüzeyler:

$$k = -\frac{\ddot{f}}{f}$$

$\sigma(u,v) = (f(u)\cos v,\ f(u)\sin v,\ g(u))$

Pseudosphere

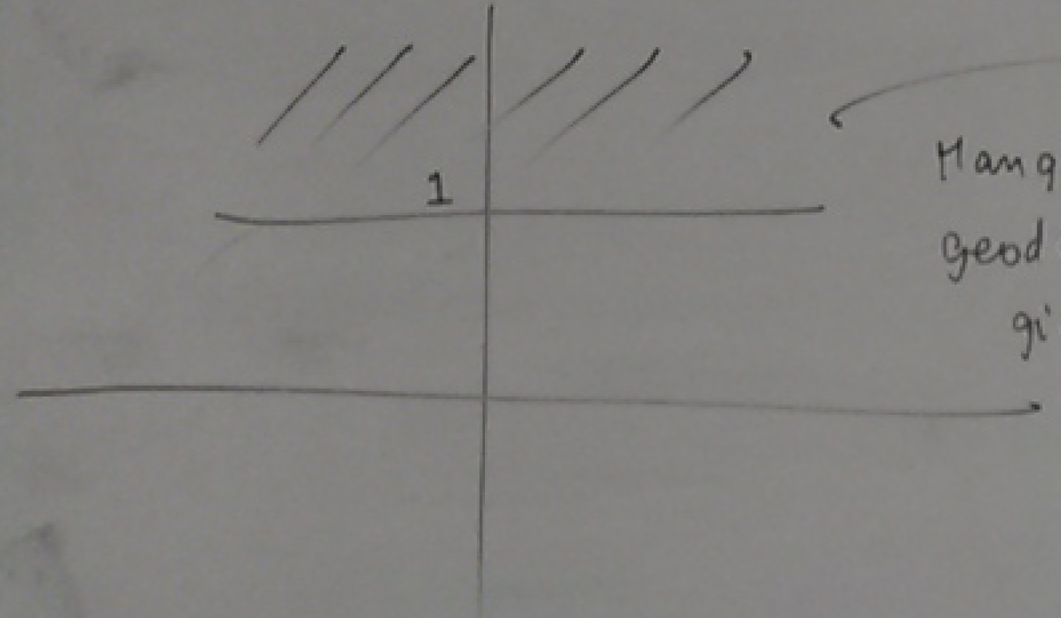
Tractrix

$(e^u, \sqrt{1-e^{2u}} - \cosh^{-1}(e^{-u}))$

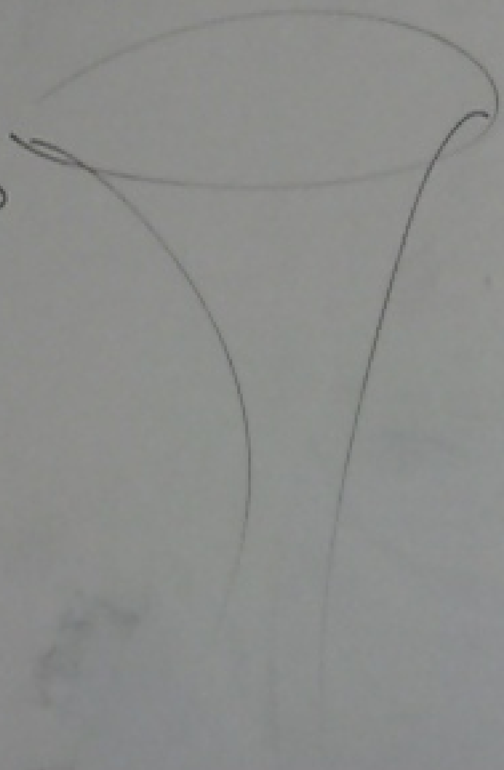
$w = e^{-u}$ koyacak,

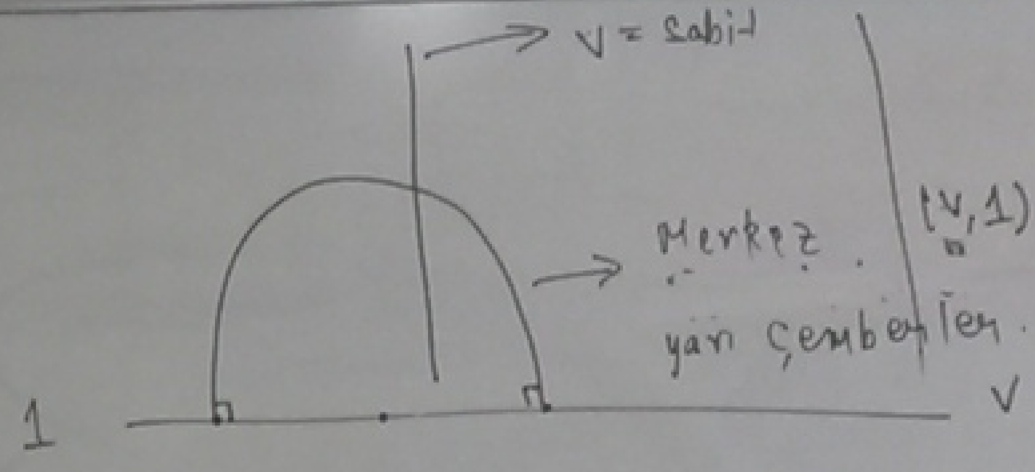
$$\vec{\sigma}(v,w) = \left(\frac{1}{w}\cos v,\ \frac{1}{w}\sin v,\ \sqrt{1-\frac{1}{w^2}} - \cosh^{-1}(w)\right)$$

$v \in \mathbb{R} \quad w \geq 1$



Hangi eğriler geodezikleri gidiyor





$$\frac{dv^2 + dw^2}{w^2}$$

- Her iki noktaları arasında tek bir "doğru" var.
- Beşinci postulat geçersiz

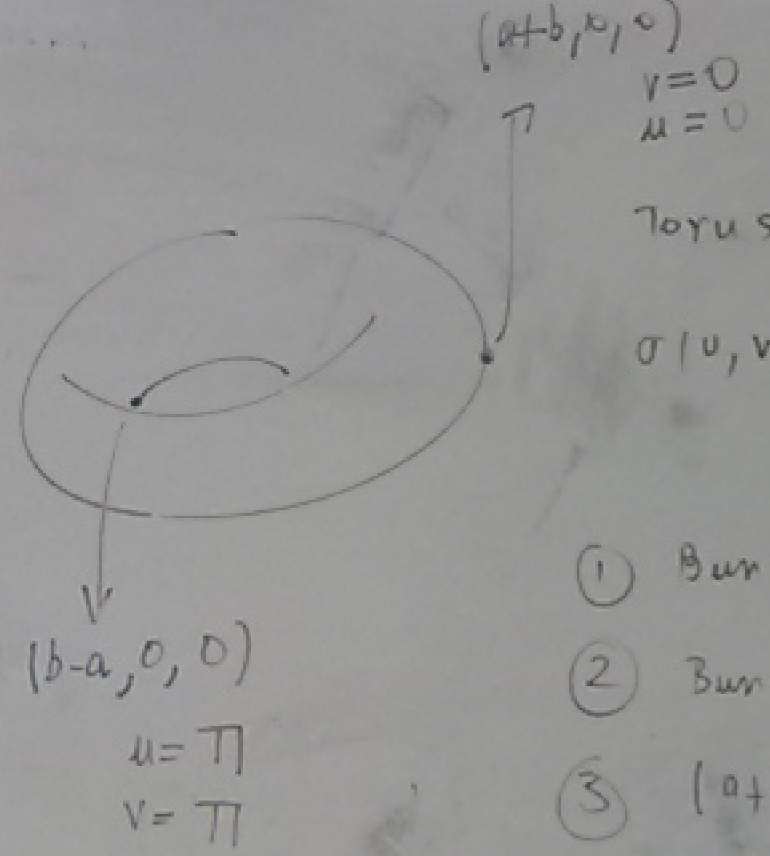
Janos Bolyai ~ 1830'ler
Lobachevsky ~ 1830'ler

mesafe $\tilde{\gamma}$ üzerindeki mesafeden küçüktür.

i.e $\int_0^1 \|\dot{\gamma}\| dt \leq \int_0^1 \|\dot{\tilde{\gamma}}\| dt$

$\sigma(u,v) := \gamma(u)$ ...

Not a) $\sigma(u,v)$ 'b' noktanın etrafında düzgün regular parametrizasyondur. (Kapalı fonksiyon Teorem)



Torus

$$\sigma(u,v) = \left((a+b\cos u)\cos v,\ (a+b\cos u)\sin v,\ b\sin u \right)$$

$|a| > |b|$

1. Bunun Gaussian eğrilik hangi noktalarında < 0.
2. Bunun üzerindeki geodezikleri hesaplayınız.
3. $(a+b,0,0)$ ve $(b-a,0,0)$ arasındaki mesafe nedir?