$k_g \equiv 0 \quad = \quad \ddot{\gamma} = 0 \Rightarrow \gamma = \alpha t + \beta$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$

Sonuç $\mathbb{R}^2$ içinde [geod]ezikler doğru parçalarıdır

Örnek 2 S^2 içinde geodezikler büyük çember parçaları.

$\Rightarrow \langle \dot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$

$\Rightarrow \|\dot{\gamma}\| = \text{Sabit}$.

$\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle$

$\langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$

Geodezikler

①

Fikir $\gamma \subset S$
Eğri Yüzey

$\gamma(t)$: Araba 't' zamanda nerede.

$\ddot{\gamma}(t)$: Eyim.

Soru Yüzey üzerinde olan bir izleyici'ye göre Eyim '0' mı?

Sadece $\ddot{\gamma}$'nın yüzey üzerindeki etki önemli.

Tanım $\gamma \subset S$, birim hız
Eğri Yüzey

$\ddot{\gamma} = k_n N + k_g N \times \dot{\gamma}$

k_n: Normal Eğrilik

k_g: Geodezik Eğrilik

Yüzey üzerinde olan bir izleyici sadece k_g farkeder.

(Birim Hız $\Rightarrow \dot{\gamma}, N, N \times \dot{\gamma}$ bir baz oluyor + $\langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$)

Soru: Yüzey ... olan bir izleyici'ye göre ... m D ... kadece γ'nın ... üzerindeki etki önemli.

Normal eğrilik — Geodezik eğrilik — $\langle \dot\gamma, \ddot\gamma \rangle = 0$

Yüzey üzerinde olan bir izleyici sadece k_g farkındadır.

Tanım $\gamma \subset S$
Eğer $k_g \equiv 0$, γ geodezik denir.

Örnek 1 $S = \mathbb{R}^2$

$\gamma \subset \mathbb{R}^2 \quad \dot\gamma, \ddot\gamma \subset \mathbb{R}^2$

k_n zaten 0.

$k_g \equiv 0 \Rightarrow \ddot\gamma \equiv 0 \Rightarrow \gamma = \alpha t + \beta$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$

Sonuç $\mathbb{R}^2$ içinde geodezikler doğru parçalarıdır.

Örnek 2 S^2 içinde geodezikler büyük çember parçaları.

Prop 3 $\gamma \subset S$ bir eğri (2)
Eğer $\ddot\gamma \parallel N$, o zaman $\|\dot\gamma\|$ sabittir.

İspat $\dot\gamma \perp N$ (Çünkü $\dot\gamma$ Teğet düzlem içindedir)

$\langle \dot\gamma, N \rangle \equiv 0$.

Ama $\ddot\gamma \parallel N$

$\Rightarrow \langle \dot\gamma, \ddot\gamma \rangle = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle \dot\gamma, \dot\gamma \rangle = 0$

$\Rightarrow \|\dot\gamma\| = \text{Sabit}$.

$\langle \dot\gamma, \dot\gamma \rangle'$
$\langle \ddot\gamma, \dot\gamma \rangle = 0$

i.e $\ddot{\gamma} \perp \sigma_u$, $\ddot{\gamma} \perp \sigma_v$

$\Rightarrow \langle \frac{d}{dt}(\sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}), \sigma_u \rangle \equiv 0$ — a)

w $\langle \frac{d}{dt}(\sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}), \sigma_v \rangle = 0$ — b)

$\Rightarrow \frac{d}{du} \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle = G_u$

$\Rightarrow \langle \sigma_v, \sigma_{uv} \rangle = \frac{G_u}{2}$

$\rightarrow \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle = F$

$\Rightarrow \frac{d}{\ } \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle = F_u$

Prop 4 Eğer $\gamma \subset S$ bir doğru parçası ise, γ bir geodeziktir.

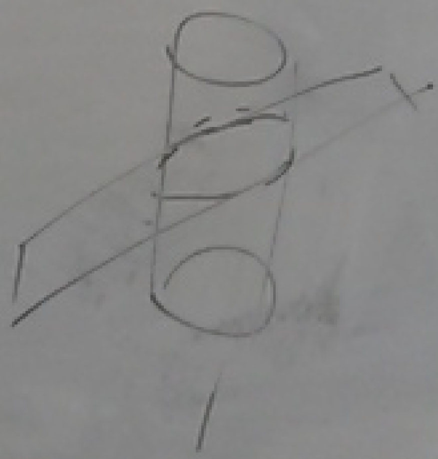
İspat $\gamma = v + tw$ $\quad v, w \in \mathbb{R}^3$ şekline yazılabilir.

$\Rightarrow \ddot{\gamma} \equiv 0$.

Tanım 6 (Normal kesişim) $S \subset \mathbb{R}^3$ yüzey, $H \subset \mathbb{R}^3$ bir düzlem.

$\gamma = S \cap H$

Eğer her noktada $\dot{\gamma}$ düzlem H içinde ise, γ bir normal kesişim denir.



Örnek $S^2 \cap$ O'dan geçen düzlem $\rightsquigarrow$ Büyük çember.

Prop 7 Normal kesişimler geodeziktir.

İspat Size bırakıyorum.

Geodezik Denklemler

Her geodezik çeşitli diferensiyel denklemler sağlar.

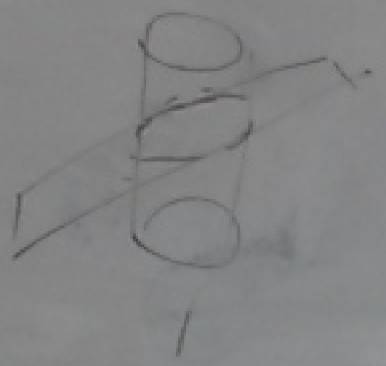
Theorem 8 $\gamma \subset S$ bir birim hız geodezik olsun. O zaman

(i) $\frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_u \dot{u}^2 + 2F_u \dot{u}\dot{v} + G_u \dot{v}^2)$

(ii) $\frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_v \dot{u}^2 + 2F_v \dot{u}\dot{v} + G_v \dot{v}^2)$

$\gamma = S \cap H$

Eğer her noktada $\ddot{\gamma}$ düzlem H içinde ise, γ bir normal kesişim denir.



Theorem 8 $\gamma \subset S$ bir birim h... geodezik olsun. O zaman

(i) $\frac{d}{dt}\left(E\dot{u} + F\dot{v}\right) = \frac{1}{2}\left(E_u \dot{u}^2 + 2F_u \dot{u}\dot{v} + G_u \dot{v}^2\right)$

(ii) $\frac{d}{dt}\left(F\dot{u} + G\dot{v}\right) = \frac{1}{2}\left(E_v \dot{u}^2 + 2F_v \dot{u}\dot{v} + G_v \dot{v}^2\right)$

Ayrıca (i) ve (ii) sağlayan her, eğri bir geodeziktir.

birim hız (Birinci Temel formu: $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$)

İspat $\gamma = \sigma(u,v)$ olsun $\left(\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))\right)$

$\Rightarrow \dot{\gamma} = \sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}$

$\Rightarrow \ddot{\gamma} = \sigma_{uu}\dot{u}^2 + 2\sigma_{uv}\dot{u}\dot{v} + \sigma_{vv}\dot{v}^2 + \sigma_u \ddot{u} + \sigma_v \ddot{v}$

γ Geodezik $\Leftrightarrow \ddot{\gamma} \parallel N$ ($\ddot{\gamma}$, N ile paralel)

i.e $\ddot{\gamma} \perp \sigma_u$, $\ddot{\gamma} \perp \sigma_v$

$\Rightarrow \left\langle \frac{d}{dt}(\sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}), \sigma_u \right\rangle = 0$ — a)

ve $\left\langle \frac{d}{dt}(\sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}), \sigma_v \right\rangle = 0$ — b)

(4)

a): $\frac{d}{dt}\langle \sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}, \sigma_u\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}(\sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}), \sigma_u \right\rangle + \left\langle \sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}, \frac{d}{dt}\sigma_u \right\rangle$

a) $\Rightarrow \frac{d}{dt}\langle \sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}, \sigma_u\rangle = \left\langle \sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}, \frac{d}{dt}\sigma_u \right\rangle$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(E\dot{u} + F\dot{v}\right) = \langle \sigma_u \dot{u} + \sigma_v \dot{v}, \sigma_{uu}\dot{u} + \sigma_{uv}\dot{v}\rangle$

Hatırlatma $\to \langle \sigma_u, \sigma_u\rangle = E$

$\Rightarrow \frac{d}{du}\langle \sigma_u, \sigma_u\rangle = E_u \Rightarrow \langle \sigma_u, \sigma_{uu}\rangle = \frac{E_u}{2}$

$\longrightarrow \langle \sigma_v, \sigma_v\rangle = G$

$\Rightarrow \frac{d}{du}\langle \sigma_v, \sigma_v\rangle = G_u$

$\Rightarrow \langle \sigma_v, \sigma_{uv}\rangle = \frac{G_u}{2}$

$\longrightarrow \langle \sigma_u, \sigma_v\rangle = F$

$\Rightarrow \frac{d}{du}\langle \sigma_u, \sigma_v\rangle = F_u$

Corollary 10 S^2'deki her geodezik bir büyük çemberdir.

$\Rightarrow$ σ Geodezikleri Geodezikleri götürür.

$\Rightarrow$ $S^1 \times \mathbb{R}$'deki her geodezik $(\cos(\alpha t+\beta), \sin(\alpha t+\beta), \gamma t+\delta)$ şeklinde olacak

Geodezikler

(5)

$\langle \sigma_u, \sigma_{uu} \rangle = \frac{E_u}{2}$

$\langle \sigma_v, \sigma_{uv} \rangle = \frac{G_u}{2}$

$\langle \sigma_{uu}, \sigma_v \rangle + \langle \sigma_{uv}, \sigma_u \rangle = \frac{F_u}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_u \dot{u}^2 + 2F_u \dot{u}\dot{v} + G_u \dot{v}^2)} \quad \text{I}$$

Benzer şekilde,

$$\boxed{\frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_v \dot{u}^2 + 2F_v \dot{u}\dot{v} + G_v \dot{v}^2)} \quad \text{II}$$

Bu denklemler bu şekilde oluyor

İkinci dereceli denklemler.

$$\ddot{u} = f(u, v, \dot{u}, \dot{v})$$
$$\ddot{v} = g(u, v, \dot{u}, \dot{v})$$

f, g düzgün fonksiyonlar.

Temel Teorem: Her a, b, c, d ve t_0 için

$$\ddot{u} = f(u, v, \dot{u}, \dot{v})$$
$$\ddot{v} = g(u, v, \dot{u}, \dot{v})$$

ve

$$u(t_0) = a \qquad \dot{u}(t_0) = c$$
$$v(t_0) = b \qquad \dot{v}(t_0) = d$$

sağlayan, bir $\varepsilon > 0$ için $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ aralıkta tek bir düzgün çözüm var.

$$\frac{d}{dt}(E\dot u + F\dot v) = \frac{1}{2}(E_v\dot u^2 + 2F_v\dot u\dot v + G_v\dot v^2) \qquad \text{II}$$

Teorem

$$\ddot u = f(u,v,\dot u,\dot v)$$
$$\ddot v = g(u,v,\dot u,\dot v)$$

ve $u(t_0)=a \quad \dot u(t_0)=c$

$v(t_0)=b \quad \dot v(t_0)=d$

Sağlayan, bir $\varepsilon>0$ için $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ aralıkta tek bir düzgün çözüm var.

Teorem 9 $S \subset \mathbb{R}^3$ düzgün regular yüzey olsun. $p \in S$ ve $v \in T_pS$ olsun. O zaman,

p'den geçen ve p noktada yön 'v' olan tek bir geodezik var.

$(\exists\ \gamma \subset S \mid \gamma(0)=p,\ \gamma'(0)=v$ ve γ: Geodezik$)$

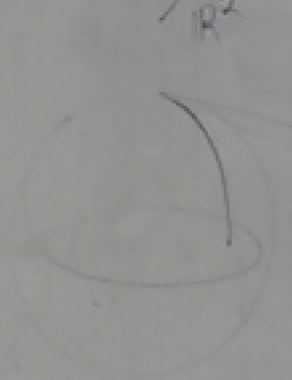
Corollary 10 S^2'deki her geodezik bir büyük çemberdir.

Örnek 11 $S^1 \times \mathbb{R}$ içinde geodezikler.

$(\alpha+t\beta, \gamma+t\delta)$

$\mathbb{R}^2$

$\sigma(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$



$$[-\pi,\pi]\times\mathbb{R} \xrightarrow{\sigma} S^1\times\mathbb{R}$$
$$(u,v) \qquad \sigma(u,v)$$

$\Rightarrow$ BTF $du^2+dv^2 \qquad du^2+dv^2$

Geodezik Denklemler sadece birinci temel formu ile alakalı.

$\Rightarrow$ σ Geodezikleri Geodezikleri götürür.

$\Rightarrow$ $S^1\times\mathbb{R}$'deki her geodezik

$(\cos(\alpha+t\beta), \sin(\alpha+t\beta), \gamma+t\delta)$ şeklinde olur

$g(0,v) = 1$

$g_u(0,v) = 1.$

$f(x_1,\dots,x_n) = 0$

Varsayalım ki (1) f ... ile $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ sürekli

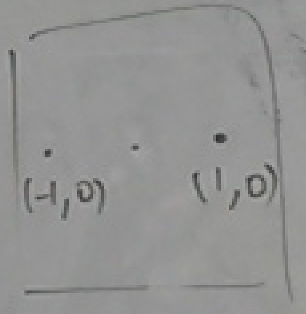
(2) $f'(a)$ ...lenebilir $\Leftrightarrow$ $\det(f'(a)) > 0$

O zaman, $V \subset U$ ve $W \ni f(a)$ var ki (V, W açık)

$f: V \to W$

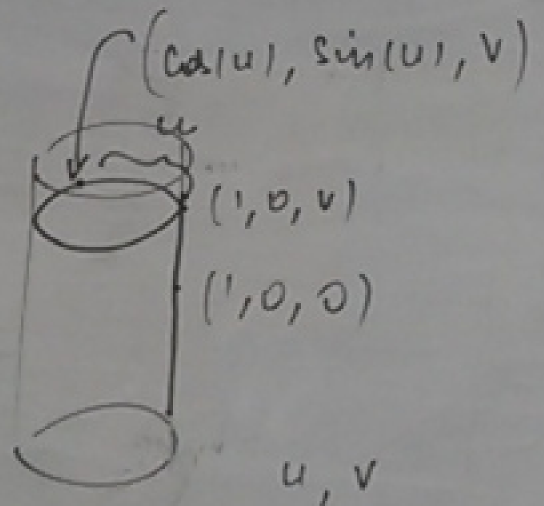
Theorem 12

$p, q \in S$ iki nokta olsun. Bunlar arasında en kısa mesafeli yol olsun, bunu γ diyelim. Varsayalım ki γ düzgündür. O zaman γ bir geodeziktir.



$S = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

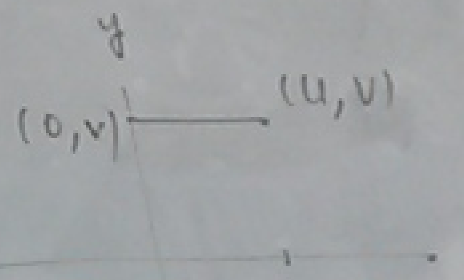
O zaman $(-1,0)$ ve $(1,0)$ arasında en kısa mesafeli yol yok!



Geodezik Co-ordinatlar

(1)

Amaç Öyle bir parametrizasyon seçmek istiyoruz ki birinci Temel Formu basit olsun.

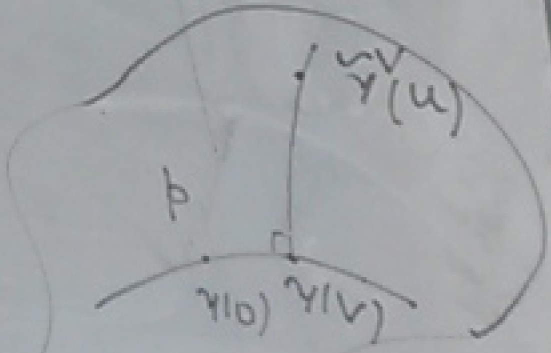


Yöntem $\gamma \subset S$ bir birim hız geodezik olsun. $q = \gamma(v)$

$p = \gamma(0)$ olsun.

Her v için, $\gamma(v)$ noktadan geçen ve $\gamma(v)$ ile dik olan birim hız geodezik $\tilde{\gamma}^v$ bulalım. $\tilde{\gamma}^v = \tilde{\gamma}^v(u)$.

$\sigma(u,v) := \tilde{\gamma}^v(u)$ olsun.



olan birim hız geodezi
γ^v bulalım. $\gamma^v = \gamma^v(u)$.
$\sigma(u,v) := \gamma^v(u)$ olsun.

Teorem $S \subset \mathbb{R}^3$ Düzgün Regular Yüzey.
O zaman yukarıdaki $\sigma(u,v)$ bir düzgün regular parametrizasyondur. Ayrıca, bu parametrizasyon ile, birinci temel formu $du^2 + g(u,v)\,dv^2$ şeklindedir. Ayrıca,

$g(0,v) = 1$

ve $g_u(0,v) = 1$.

$f(x_1, \dots, x_n) = 0$

ve İspatlamak lazım

Kapalı Fonksiyon Teorem.

① $\sigma(u,v)$ Düzgün mü?
② $\sigma(u,v)$ yüzeye kapsıyor mu?
③ $E \equiv 1$ ve $F \equiv 0$?

Hatırlatma.

Ters Fonksiyon Thm: $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $a \in U$ (U açık)
Varsayalım ki ① $f \in C^1(U)$ i.e. $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sürekli
② $f'(a)$ Terslenebilir $\Leftrightarrow \det(f'(a)) > 0$
O zaman, $V \subset U$ ve $W \ni f(a)$ var ki (V, W açık)
$f(V) = W$ ve $f|_V$ terslenebilir.
Ayrıca, $f^{-1} : W \to V$ bir C^1 fonksiyondur.

$f : V \to W$
$\exists g : W \to V$
$g f = Id$