Not: K sanki L, M, N ile bağımsız değil.

Ama THEOREMA EGREGIUM

$$\Gamma^1_{11} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma^2_{11} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG-F^2)}$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG-F^2)} \qquad \Gamma^2_{12} = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG-F^2)}$$

Hatırlatma

Theorema Egregium

Gaussian Eğrilik Yerel İzometriler altında sabit kalır.

Ya da,

K sadece Birinci Temel Formu ile ifade edilebilir.

Hatırlatma

$S \subset \mathbb{R}^3$ yüzey $\{\sigma(u,v)$ bar.$\}$

$\mathcal{G} : S \longrightarrow S^2$ Gauss D.

$\mathcal{W} : T_pS \longrightarrow T_pS$ Weingarten

S için Birinci ve İkinci Temel Formları

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$$

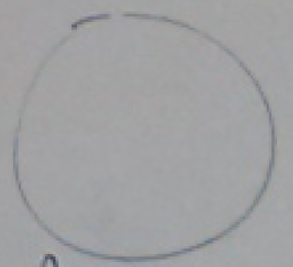
olsun.

O zaman,

$$\mathcal{W} = \mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II} \quad (\sigma_u, \sigma_v \text{ Baz'a göre})$$

$$\mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F}_{II} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$



rS^2

$v \xrightarrow{\text{Gauss}} \frac{v}{r}$ Dönüşüm

$A \subset rS^2$. O zaman

$$\frac{|\mathcal{G}(A)|}{|A|} = \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{r^2}$$

$S \subset \mathbb{R}^3$ yüzey $\{\sigma(u,v)$ bar.$\}$

$g: S \longrightarrow S^2$ Gauss D.

$\mathcal{W}: T_pS \longrightarrow T_pS$ Weingarten

$$\mathcal{F}_{II} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow K = \frac{1}{r^2}$

Hatırlatma

$$K = \det(\mathcal{W})$$
$$= \det(\mathcal{F}_I^{-1} \mathcal{F}_{II})$$
$$= \frac{\det(\mathcal{F}_{II})}{\det(\mathcal{F}_I)}$$
$$= \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

Not: K sanki L, N, M ile bağımsız değil.

Ama THEOREMA EGREGIUM BAĞIMSIZ DİYOR!

İspat

Adım 1: Eğrilik ve Mesafe arasındaki çeşitli ilişkiler

$$\begin{bmatrix} \sigma_{uu} \\ \sigma_{uv} \\ \sigma_{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{11}^2 & L \\ \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{12}^2 & M \\ \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{22}^2 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_u \\ \sigma_v \\ \bar{N} \end{bmatrix}$$

$\bar{N}$: Birim Normal

Γ_{jk}^i: Christoffel Sembolleri

Not: Γ_{jk}^i: Sadece Birinci Temel Form ile bağlı

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \qquad \Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Rightarrow \alpha = \Gamma^1_{11} = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Rightarrow \beta = \Gamma^2_{11} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}$$

$$r_{uu} = \alpha r_u + \beta r_v + \gamma N$$

$\Rightarrow$ Let $\quad r_{uu} \cdot N = \gamma \qquad (*)$

$$r_{uu} \cdot r_u = \alpha\, r_u \cdot r_u + \beta\, r_v \cdot r_u$$
$$= \alpha E + \beta F$$

$\Rightarrow$ Since $\quad r_u \cdot r_u = E$

$$\Rightarrow \frac{d}{du}(r_u \cdot r_u) = \frac{d}{du}E = E_u$$
$$\Rightarrow 2\, r_u \cdot r_{uu} = E_u$$
$$\Rightarrow r_{uu} \cdot r_u = \frac{E_u}{2}$$

$$\boxed{\frac{E_u}{2} = \alpha E + \beta F} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow r_{uu} \cdot r_v = \alpha\, r_u \cdot r_v + \beta\, r_v \cdot r_v$$
$$= \alpha F + \beta G$$

Again since

$$r_u \cdot r_u = E$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dv}(r_u \cdot r_u) = E_v$$
$$\Rightarrow r_{uv} \cdot r_u = \frac{E_v}{2}$$

Again

$$r_u \cdot r_v = F$$
$$\Rightarrow \frac{d}{du}(r_u \cdot r_v) = F_u$$
$$\Rightarrow r_{uu} \cdot r_v + r_u \cdot r_{uv} = F_u$$
$$\Rightarrow r_{uu} \cdot r_v = F_u - \frac{E_v}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_u - \frac{E_v}{2} = \alpha F + \beta G} \qquad (2)$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG-F^2)}$$

$$\boxed{\frac{E_u}{2} = \alpha E + \beta F} \quad (*)$$

$\Rightarrow \sigma_{uu} \cdot \sigma_v = F_u - \frac{E_v}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{F_u - \frac{E_v}{2} = \alpha F + \beta G} \quad (**)$$

$(*) + (**)$

$$\begin{bmatrix} \frac{E_u}{2} \\ F_u - \frac{E_v}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{E_u}{2} \\ F_u - \frac{E_v}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha = \Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}$$

$$\Rightarrow \beta = \Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}$$

④

$\Gamma_{12}^1, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2$ için benzer hesaplama yapılır.

fark edebilir .. Yüzey ile dik yönde eğim : $(\ddot{y} \cdot \overline{N}) N$ Normal Eğim

Yüzey üzerindeki Eğim : $\ddot{y} - (\ddot{y} \cdot \overline{N}) \overline{N}$ Geodezik Eğim

Adım 3 Gauss Denklemler

$EK = \ldots$

$FK = (\Gamma^1_{12})_u - (\Gamma^1_{11})_v + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}$

$FK = \ldots$

$GK = (\Gamma^1_{22})_u - (\Gamma^1_{12})_v + {}_{22}{}'{}_{11} + \Gamma_{22}\Gamma^1_{12} - (\Gamma^1_{12})^2 - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22}$

İspat Yukarıdaki Teoremin İspatındaki denklem (A)'de σ_v ve σ_u deki katsayılar eşit olmalı

$-\overline{N}_u = a\sigma_u + b\sigma_v$

$-\overline{N}_v = c\sigma_u + d\sigma_v$

$\left(\begin{array}{l} \mathcal{W}(\sigma_u) = -\overline{N}_u \\ \mathcal{W}(\sigma_v) = -\overline{N}_v \end{array} \right) (*)$

$\left(\mathcal{W} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right)$

⑧

$\Rightarrow$ (A)'da σ_u deki katsayılar bakalım

$(\Gamma^1_{11})_v + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} - Lc$

$= (\Gamma^1_{12})_u + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - Ma$

Not: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} GL-FM & GM-FN \\ -FL+EM & -FM+EN \end{pmatrix}$

$Lc - Ma = \frac{L(GM-FN) - M(GL-FM)}{EG-F^2}$

$= \frac{-F(LN-M^2)}{EG-F^2} = -FK$

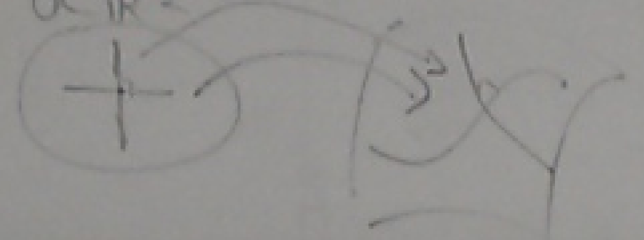
$\Rightarrow \boxed{-FK = (\Gamma^1_{11})_v + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} - (\Gamma^1_{12})_u - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12}}$ İkinci Gauss Denklem

(v sabit)

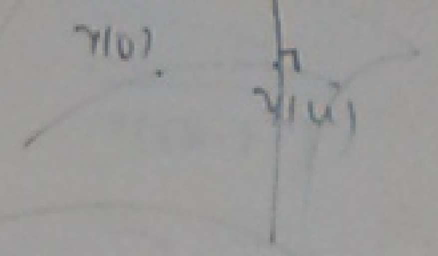
birim hız olmalı

$\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle = 0$

$U \subset \mathbb{R}^2$



noktada γ ile dik bir eğri seçeceğiz bu $\gamma(v)$



Not Başka üç Gauss Denklemler benzer şeklinde gösterilebilir.

Not K sadece Birinci Temel Formu ile ifade edilebilir!

Theorema Egregiumun İspatı bitti □.

Not Eğer Birinci Temel formu $du^2 + G\,dv^2$ şeklinde olsaydı, $(E=1,\ F=0)$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{uu} \\ \sigma_{uv} \\ \sigma_{vv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L \\ 0 & \frac{G_u}{2G} & M \\ -\frac{G_u}{2} & \frac{G_v}{2G} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_u \\ \sigma_v \\ \bar{N} \end{bmatrix}$$

Codazzi Mainardi,

$$L_v - M_u = M\frac{G_u}{2G}$$

$$M_v - N_u = -L\frac{G_u}{2} + \frac{MG_v}{2G} - \frac{NG_u}{2G}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &G = \cos^2\theta \\ &G_\theta = -2\cos\theta\sin\theta \\ &G_{\theta\theta} = 2\sin^2\theta - 2\cos^2\theta \\ &\Rightarrow K = 1. \end{aligned}}$$

Gauss Denklemler

$$K = -\left(\frac{G_u}{2G}\right)_u - \left(\frac{G_u}{2G}\right)^2 = \frac{-G_{uu}(2G) + 2(G_u)^2 - G_u^2}{4G^2} = \frac{G_u^2 - 2GG_{uu}}{4G^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} S^2 & (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta) \\ \text{BTF} & [d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\phi^2] \end{array}}$$

$(E=1,\ F=0)$

$S^2 \quad (\cos\theta\cos\varphi,\ \cos\theta\sin\varphi,\ \sin\theta)$

BTF $\quad [d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2]$

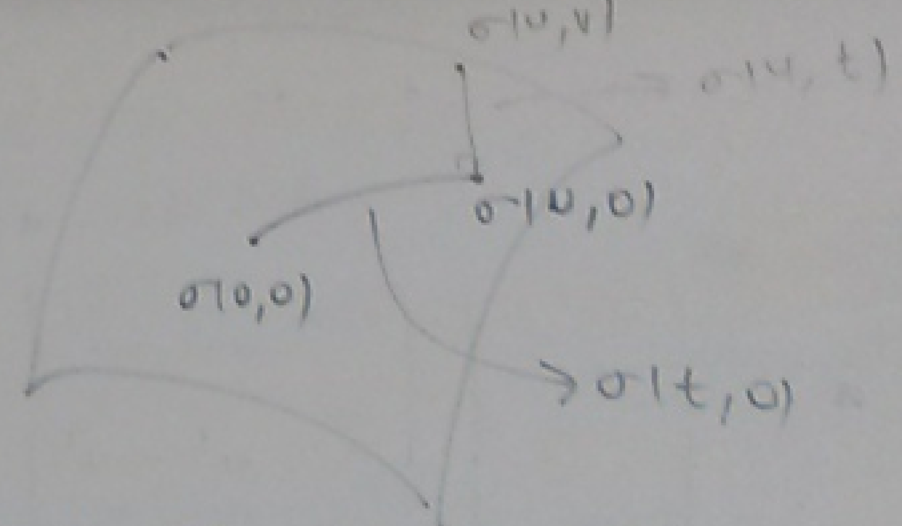
$4G^2$

(10)

Her yüzey için öyle bir parametrizasyon $\sigma(u,v)$ var ki onun BTF

$du^2 + G\,dv^2$ şeklinde

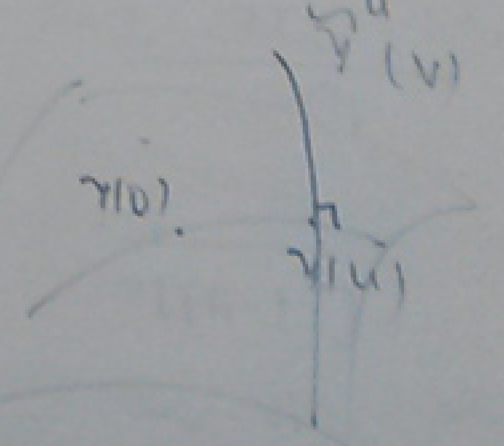
yazılabilir.



Böyle bir param için

(1) γ birim hız eğri olsun $\gamma = \gamma(u)$

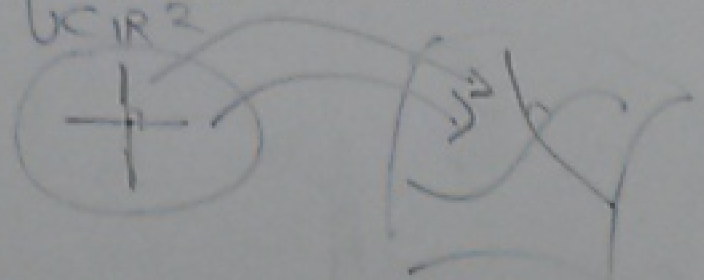
(2) Her $\gamma(u)$ noktada γ ile dik bir eğri seçeceğiz $\gamma^u(v)$



Tartışma: Eğer BTF böyle ise,

$\langle \sigma_u, \sigma_u \rangle = 1$ ise $u \to \sigma(u,v)$ (v sabit) birim hız olmalı

$\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle = 0$



$-\bar{N}_u = a\sigma_u + b\sigma_v$ $\quad$ $\mathcal{W}(\sigma_u) = -\bar{N}_u$ (*)

$-\bar{N}_v = c\sigma_u + d\sigma_v$ $\quad$ $\mathcal{W}(\sigma_v) = -\bar{N}_v$

$= \dfrac{-F(LN-M^2)}{EG-F^2} = -FK$

$\mathcal{W} = \dfrac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{-FK = (\Gamma^1_{11})_v + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}}$ İkinci Gauss

Not $\tilde{\gamma}^{u}$ ve $\tilde{\gamma}^{u_1}$ kesişmemek lazım.

$\sigma(u,v) := \tilde{\gamma}^{u}(v)$ düzgün olması lazım.

Geodezikler

Aladdin diyelim bir yüzey üzerinde araba sürüyor.

Büşra yüzey üzerinde.

Büşra'ya göre Arabanın Eyim $= 0$.

$t \longrightarrow \gamma(t)$ Araba'nın Pozisyon 't' zamanda.

Eyim : $\ddot{\gamma}(t)$

Büşra sadece $\ddot{\gamma}$'nın yüzey üzerindeki izdüşüm farkedebilir.

Yüzey ile dik yönde eyim : $(\ddot{\gamma}\cdot\bar{N})\,\bar{N}$ Normal Eyim

Yüzey üzerindeki Eyim : $\ddot{\gamma} - (\ddot{\gamma}\cdot\bar{N})\,\bar{N}$ Geodezik Eyim