

a, b, c : Vektörler $\mathbb{R}^3$

$$\sigma_{uu} = \sigma_{uv} = \sigma_{vv} = 0$$

$\Rightarrow$ İkinci Temel form = 0.

Silindren

$$\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

Çevrilmiş Yüzeyler

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

$$(f(u), 0, g(u)) \subset \mathbb{R}^3$$

$$(f(t), g(t))$$

Yüzeylerin Eğrilik

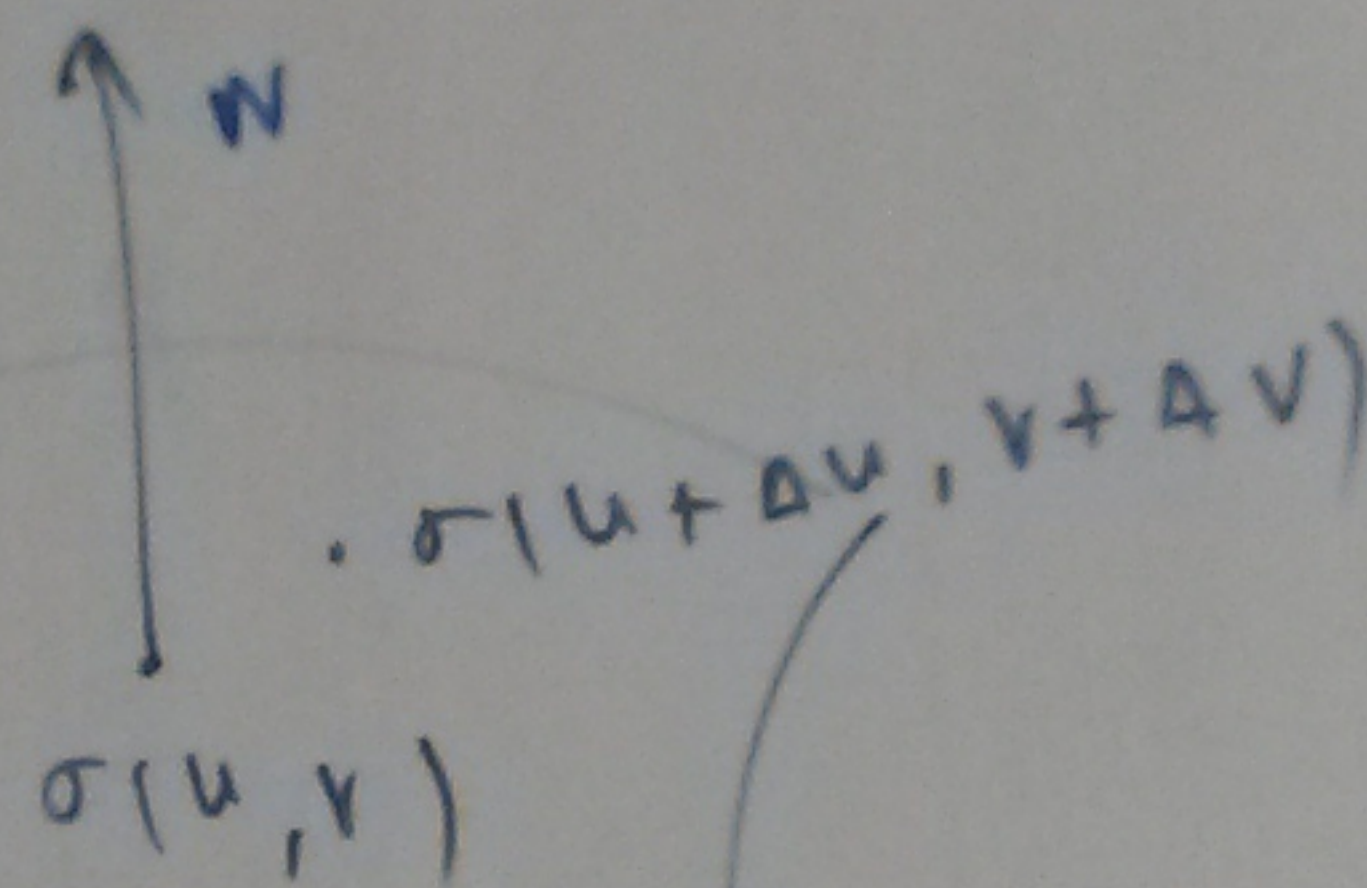
$S \subset \mathbb{R}^3$ Düzgün regular yüzey

$\sigma: U \rightarrow S$ patch.

$$\sigma(u + \Delta u, v + \Delta v) - \sigma(u, v)$$

$$\approx \sigma_u \Delta u + \sigma_v \Delta v + \sigma_{uu} (\Delta u)^2 + 2\sigma_{uv} (\Delta u)(\Delta v) + \sigma_{vv} (\Delta v)^2$$

$$\left[\sigma(u + \Delta u, v + \Delta v) - \sigma(u, v) \right] \cdot N \approx (\sigma_{uu} \cdot N) (\Delta u)^2 + 2(\sigma_{uv} \cdot N) (\Delta v)(\Delta u) + (\sigma_{vv} \cdot N) (\Delta v)^2$$



Tanım 1 (İkinci Temel Form)

$S \subset \mathbb{R}^3$ Düzgün regular

Yüzey

$\sigma: U \rightarrow S$ patch (düzgün regular)

İkinci Temel formu $\rightarrow$

$$L du^2 + M du dv + N dv^2$$

Burada:

$$L := \sigma_{uu} \cdot \bar{N}$$

$$M := \sigma_{uv} \cdot \bar{N}$$

$$N := \sigma_{vv} \cdot \bar{N}$$

Birim

$\bar{N}$: Dik vektör

$$\Rightarrow \left[\sigma(u+\Delta u, v+\Delta v) - \sigma(u, v) \right] \cdot N \approx (\sigma_{uu} \cdot N) (\Delta u)^2 + 2(\sigma_{uv} \cdot N) (\Delta v) (\Delta u) + (\sigma_{vv} \cdot N) (\Delta v)^2$$

burada :

$$L := \sigma_{uu} \cdot \bar{N}$$

$$M := \sigma_{uv} \cdot \bar{N}$$

$$N := \sigma_{vv} \cdot \bar{N}$$

Birim $\bar{N}$: Diğ. vektör

Hesaplamalar $\Pi \cdot \hat{x}$

Düzlem : $\sigma(u, v) = a + bu + cv$

a, b, c : Vektörler $\mathbb{R}^3$

$$\sigma_{uu} = \sigma_{uv} = \sigma_{vv} = 0$$

$\Rightarrow$ İkinci Temel form = 0.

Silindere $\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$

$$\sigma_{uu} = -(\cos u, \sin u, 0)$$

$$\sigma_{uv} = 0$$

$$\sigma_{vv} = 0$$

$$\bar{N} = (\cos u, \sin u, 0)$$

İkinci Temel formu :

$$-du^2$$

Çevirilmiş Yüzeyler

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

$$(f(u), 0, g(u)) \subset xz \text{ düzlem}$$

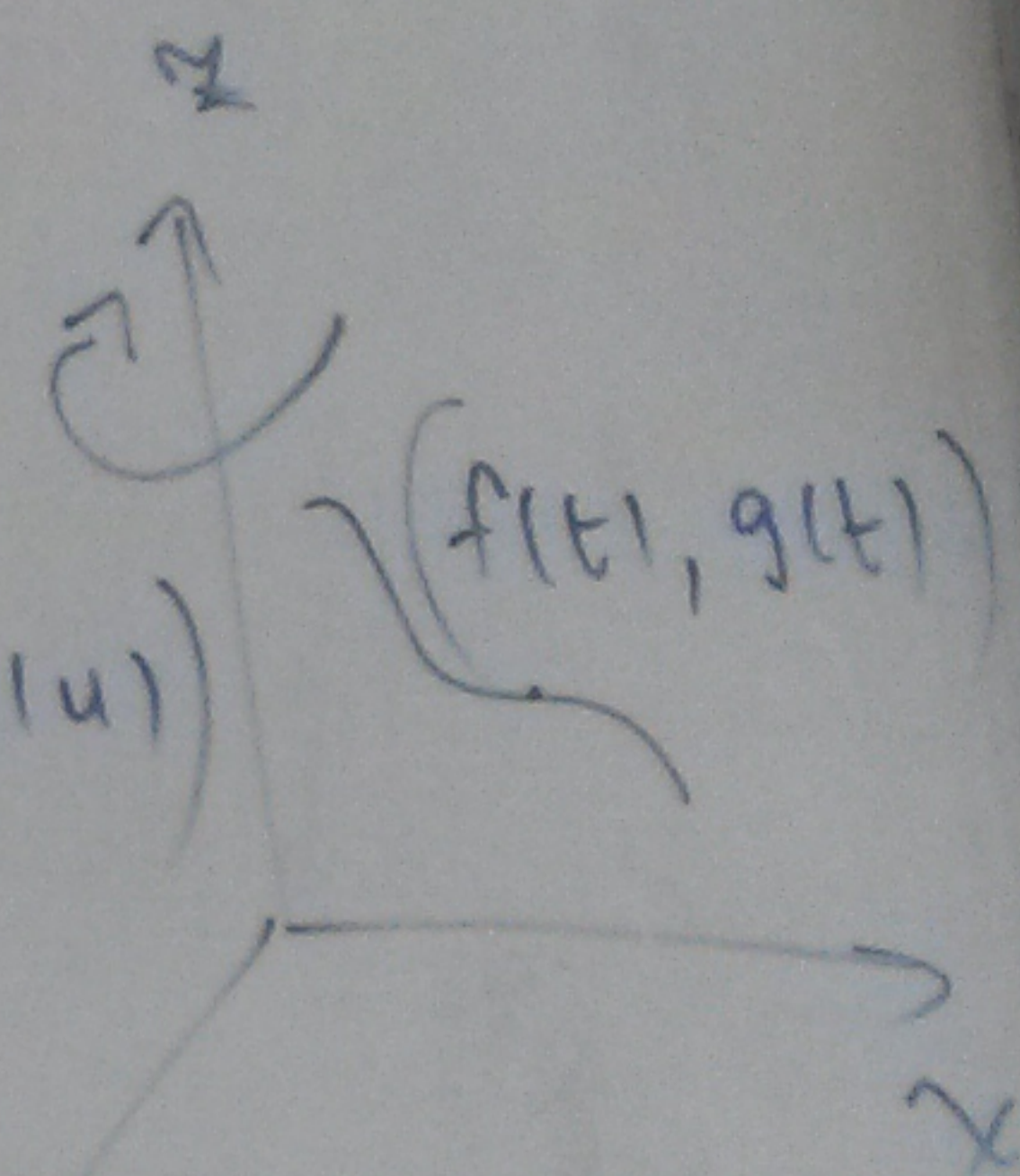
içinde

bir

egri

$$f \geq 0$$

$$g \geq 0$$



(2)

Küre İçin

$$du^2 + f^2 dv^2$$

(Birinci
temel
formu ile
aynı!)

$$\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

$(f, 0, g)$: Birim hız olsun.

$$\text{Birim hız} \Rightarrow \dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$$

$$\sigma_u = (\dot{f} \cos v, \dot{f} \sin v, \dot{g})$$

$$\sigma_v = (-f \sin v, f \cos v, 0)$$

$$\text{Birinci Temel formu: } \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle du^2 + 2\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle du dv + \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle dv^2$$

$$\rightarrow = (\dot{f}^2 + \dot{g}^2) du^2 + 0 du dv + f^2 dv^2$$

$$= du^2 + f^2 dv^2$$

İkinci Temel formu

$$\sigma_{uu} = (\ddot{f} \cos v, \ddot{f} \sin v, \ddot{g})$$

$$\sigma_{uv} = (-\dot{f} \sin v, \dot{f} \cos v, 0)$$

$$\sigma_{vv} = (-f \cos v, -f \sin v, 0)$$

$$\bar{N} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \frac{(-\dot{g} f \cos v, -\dot{g} f \sin v, f \dot{f})}{\sqrt{f^2 (\dot{f}^2 + \dot{g}^2)}}$$

$$= (-\dot{g} \cos v, -\dot{g} \sin v, \dot{f})$$

Birinci temel formu: $\sigma_u, \sigma_u > du^2 + 2\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle dudv + \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle dv^2$

$$\rightarrow = (\dot{f}^2 + \dot{g}^2) du^2 + 0 dudv + f^2 dv^2$$

$$= du^2 + f^2 dv^2$$

$$\sqrt{f^2(\dot{f}^2 + \dot{g}^2)}$$

$$= (1 - g \cos v, -g \sin v, f)$$

$$L = \sigma_{uu} \cdot \bar{N} = -\ddot{f}\dot{g} + \ddot{g}\dot{f}$$

$$M = \sigma_{uv} \cdot \bar{N} = 0$$

$$N = \sigma_{vv} \cdot \bar{N} = f\dot{g}$$

İkinci Temel formu: $(\ddot{g}\dot{f} - \dot{g}\ddot{f}) du^2 + f\dot{g} dv^2$

küre: $(f(u), g(u)) = (\cos u, \sin u)$

küre için $du^2 + \cos^2 u dv^2$

(Birinci temel formu ile aynı!)

Theorema Egregium (Gauss)

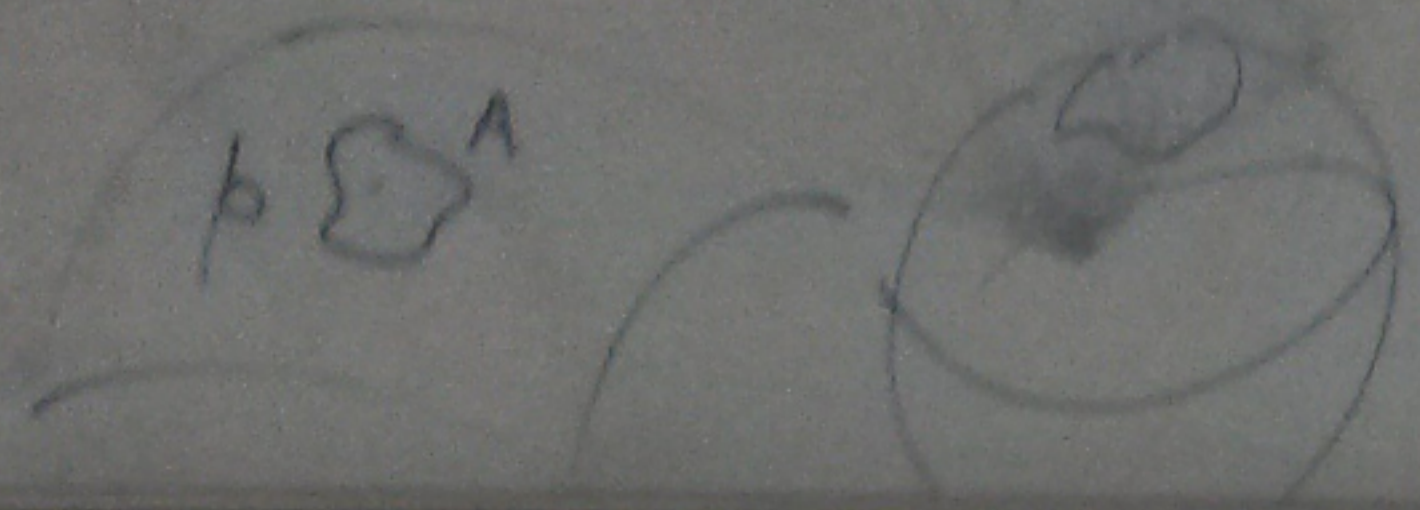
(4)

Gaussian Eğrilik yerel

İzometriler altında

Sabit kalır.

$$K(p) = \lim_{|A| \rightarrow 0} \frac{|g(A)|}{|A|}$$



$$g : \sigma(u, v) \longrightarrow (f \cos v, -g \sin v, f)$$

$$\parallel$$

$$(f \cos v, f \sin v, g)$$

Tanım IV.3

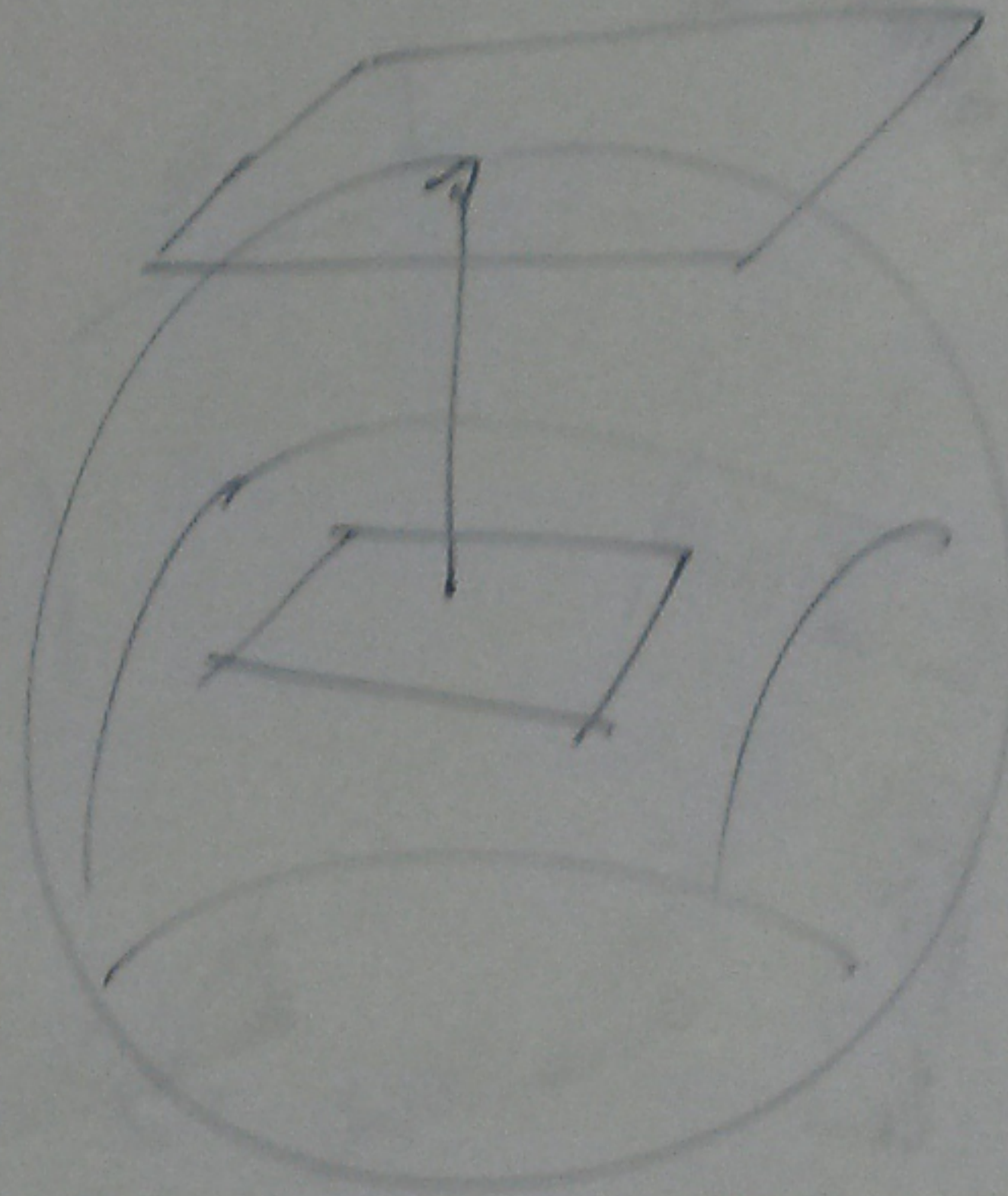
Gauss ve Weingarten Dönüşümleri

g : Düzgün Regular

$\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ Düzgün Regular Patch.

$$\sigma(u, v) \xrightarrow[\substack{\text{Gauss} \\ \text{Dönüşüm}}]{g} N(\sigma(u, v))$$

$$\substack{\cap \\ S} \quad \quad \quad \substack{\cap \\ S^2}$$



a) Gauss dönüşümün türevi $\times (-1)$ ⑤

b) $\sigma(u, v)$ 'deki birim
dik vektör $N(\sigma(u, v))$

birim küredeki noktası
olarak düşünelim.

$\mathbb{R}^2$ 'deki $N(\sigma(u, v))$
noktadaki teget düzlem
yine $N(\sigma(u, v))$ ile dir.

Soruc :

$$\tilde{w} : T_{S^1}(\sigma(u, v)) \longrightarrow T_{S^2}(\sigma(u, v))$$

$T_{S^1}(\sigma(u, v)) = T_S(\sigma(u, v))$ olduğuna için
 $T_S(\sigma(u, v))$ üzerinde bir dönüşümüdür.

Bunun Türev alalım

$$\tilde{w}_{p, S} : -DG : T_p(p) \longrightarrow T_S(p)$$

Not: Weingarten Dönüşümü hakkında

Bunun Türev alalım

$$\tilde{w}_{p,s} : -DG : T_{\tilde{g}(p)} \longrightarrow T_{\tilde{s}(p)}$$

Not: Weingarten Dönüşümü hakkında

yine $N(\sigma(u,v))$ ile dir.

Soruc :

$$\tilde{w} : T_{\tilde{g}(p)} \longrightarrow T_{\tilde{s}^2(\sigma(u,v))}$$

$T_{\tilde{s}^2(\sigma(u,v))} = T_{\tilde{s}(\sigma(u,v))}$ olduğu için
 $T_{\tilde{s}(\sigma(u,v))}$ üzerinde bir dönüşümdür.

c) $\tilde{w}$ lineer bir dönüşümdür.

Tanım (Gaussian Eğrilik)

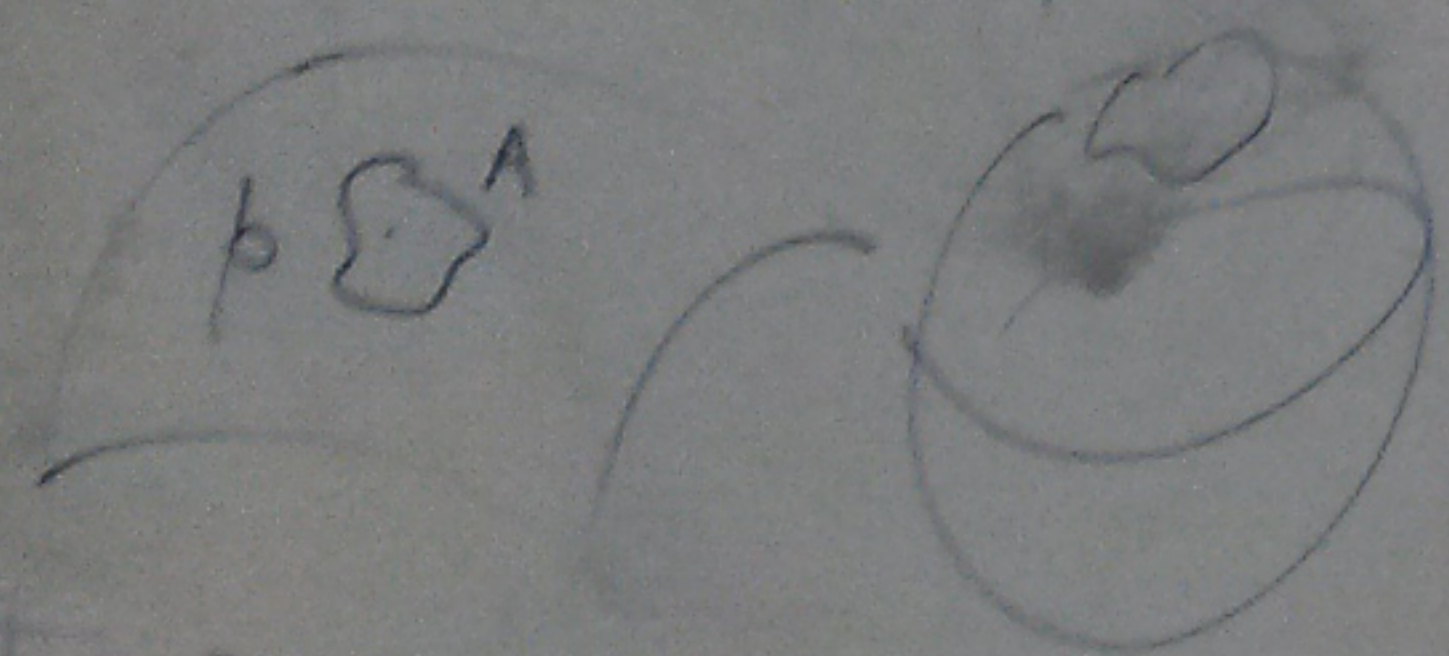
IV.4

$$K := \det(\tilde{w})$$

(Weingarten Dönüşümünün
determinant)

Teorem (Sonra)

$$K(p) = \lim_{|A| \rightarrow 0, p \in A \subset S} \frac{|g(A)|}{|A|}$$



Hesaplama IV.5

(6)

Çevrilmiş Yüzeylerin Weingarten
Matris.

$$\sigma(u,v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

$$\begin{pmatrix} \dot{g}^2 + \dot{f}^2 = 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{N}(\sigma(u,v)) = (-\dot{g} \cos v, -\dot{g} \sin v, \dot{f})$$

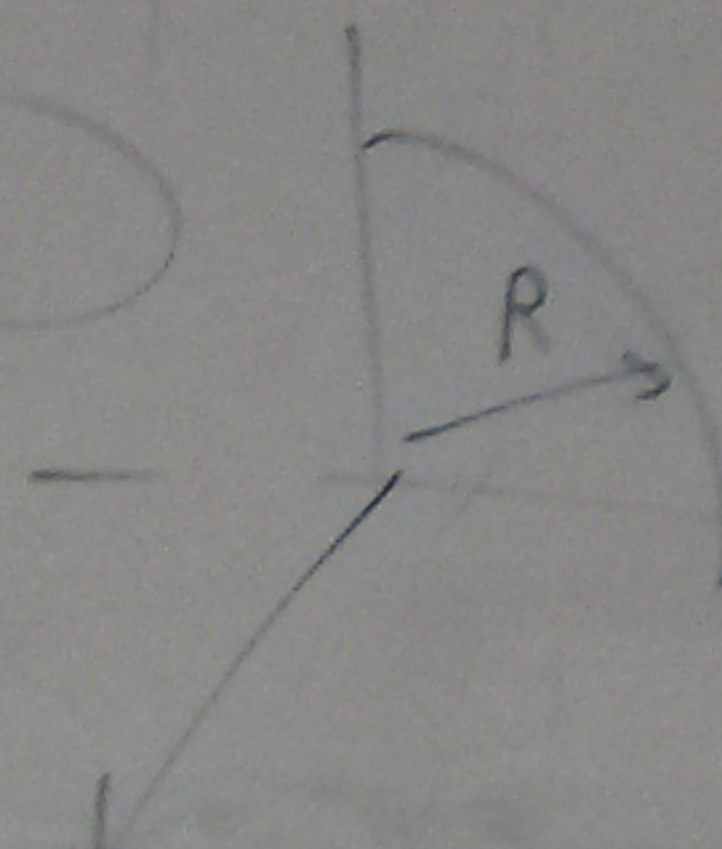
$$\begin{aligned} g : \sigma(u,v) &\longrightarrow (-\dot{g} \cos v, -\dot{g} \sin v, \dot{f}) \\ &\parallel \\ &(f \cos v, f \sin v, g) \end{aligned}$$

$$k \equiv 0$$

b) küre

$$k \equiv \frac{1}{R^2}$$

$$\left(R \cos\left(\frac{u}{R}\right), 0, R \sin\left(\frac{u}{R}\right) \right)$$



$$\ddot{\gamma} = k_n \bar{N} + k_g \bar{N} \times \dot{\gamma}$$

şeklinde yazılabilir

$k_n \rightarrow$ NORMAL EĞRİLİK

$k_g \rightarrow$ GEODEZİK EĞRİLİK

Diğer normal
orthonormal baz

$$(f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) \xrightarrow{\text{Aussage Dönüşüm}} (-\dot{g} \cos v, -\dot{g} \sin v, \dot{f})$$

$$u \rightarrow \sigma(u, v) \quad \text{Türev} = \sigma_u$$

v sabit olsun.

Türev alınca,

$$u \text{ sabit olsun } \sigma_u \xrightarrow{D\gamma} (-\ddot{g} \cos v, -\ddot{g} \sin v, \ddot{f}) = \alpha \sigma_u + \beta \sigma_v$$

$$\sigma_v \xrightarrow{D\gamma} (\dot{g} \sin v, -\dot{g} \cos v, 0) = \gamma \sigma_u + \delta \sigma_v = -\frac{\dot{g}}{f} \sigma_v$$

$$\sigma_u = (\dot{f} \cos v, \dot{f} \sin v, \dot{g})$$

$$\sigma_v = (-f \sin v, f \cos v, 0)$$

$$W = -D\gamma = - \begin{pmatrix} \frac{\ddot{f}}{\dot{g}} & \frac{\dot{f}\ddot{f} + \dot{g}\ddot{g} \cot(v)}{f} & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{g}}{f} & \frac{\dot{g}}{f} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \dot{f} \cos v - \beta f \sin v, \alpha \dot{f} \sin v + \beta f \cos v, \alpha \dot{g} \end{pmatrix} = (-\dot{g} \cos v, -\dot{g} \sin v, \dot{f})$$

$$\alpha = \frac{\ddot{f}}{\dot{g}} \quad \frac{\dot{f}\ddot{f} + \dot{g}\ddot{g}}{\dot{g}} \cos v - \beta f \sin v = -\dot{g} \cos v$$

$$\beta = \frac{\dot{f}\ddot{f} + \dot{g}\ddot{g}}{f} \frac{\cos v}{\sin v} - \dot{g} \cos v$$

$$\sigma_u = (\dot{f} \cos v, \dot{f} \sin v, g)$$

$$\sigma_v = (-f \sin v, f \cos v, 0)$$

$$W = -D_y = - \begin{pmatrix} \frac{\ddot{f}}{g} & \frac{\dot{f}\ddot{f} + \dot{g}\ddot{g} \cot(v)}{f - \dot{g}} \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} -\frac{\ddot{f}}{\dot{g}} & -\frac{\dot{f}\ddot{f} + \dot{g}\ddot{g} \cot(v)}{\dot{g}} \end{pmatrix}$$

$$K = -\frac{\ddot{f}}{f} \quad (K = \det(W))$$

Özellikle a) Silindere

$$K \equiv 0$$

b) Küre

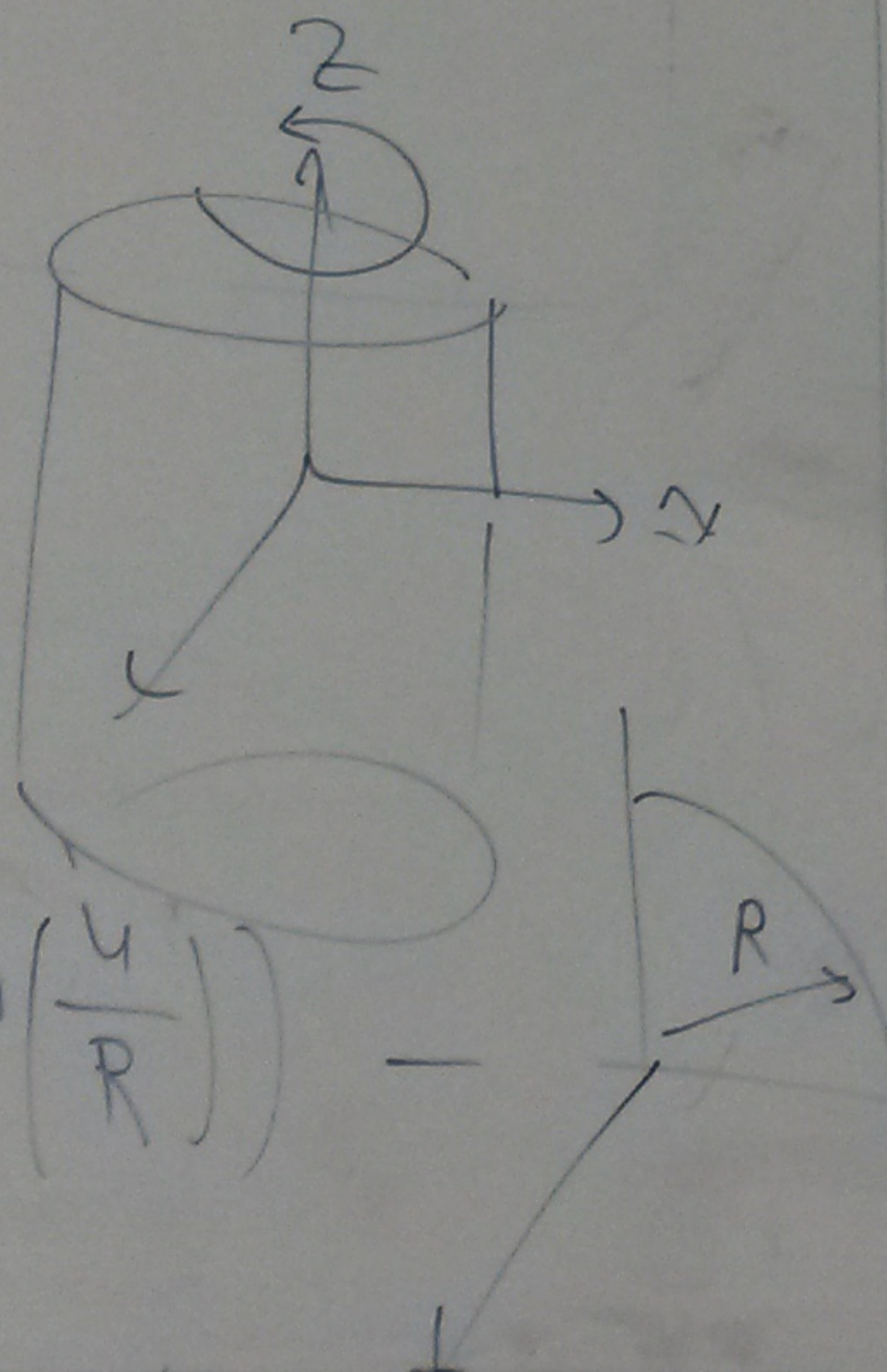
$$K = \frac{1}{R^2}$$

$$(1, 0, u)$$

$$\parallel$$

$$\parallel$$

$$\left(R \cos\left(\frac{u}{R}\right), 0, R \sin\left(\frac{u}{R}\right) \right)$$



IV.6 Tartışma.

$p \in S$ γ p 'den geçen
birim hız eğri olsun.
 $\gamma \subset S$.

$$\dot{\gamma} \in T_p(S)$$

$\dot{\gamma}$ birim hız olduğu için

$$\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 1$$

türev alırsak,

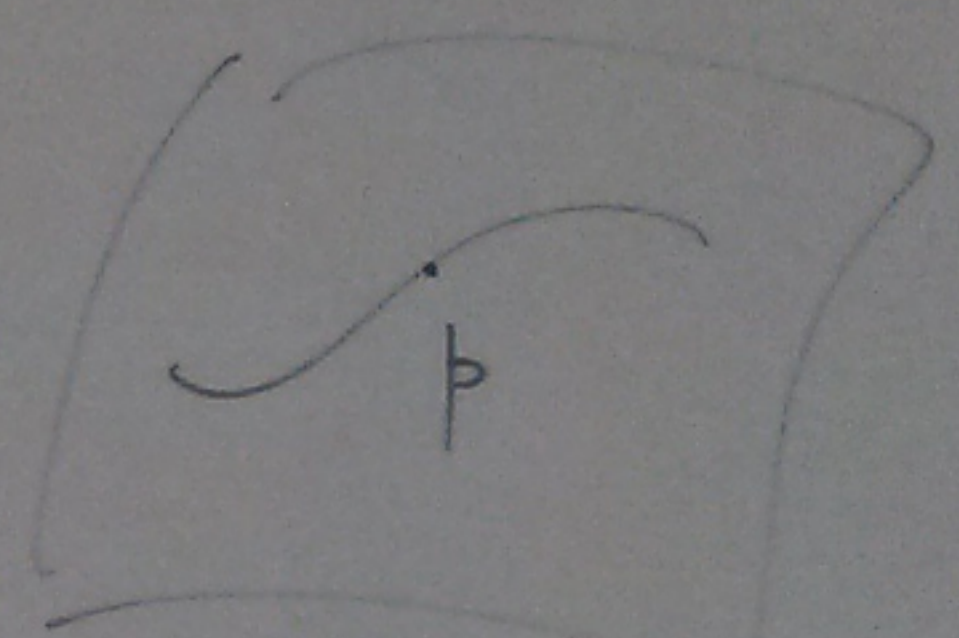
$$\langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0.$$

$$\ddot{\gamma} = k_n \bar{N} + k_g \bar{N} \times \dot{\gamma}$$

Şeklinde yazılabilir.

$k_n \rightarrow$ NORMAL EĞRİLİK

$k_g \rightarrow$ GEODEZİK EĞRİLİK



$$\{\bar{N}, \dot{\gamma}, \bar{N} \times \dot{\gamma}\}$$

Dik normal
orthonormal baz

IV-7 Tartakna.

$$L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

bu bir iç çarpım veriyor.

($T_p(S)$ üzerinde)

$$\begin{aligned} \langle \langle \alpha \sigma_u + \beta \sigma_v, \gamma \sigma_u + \delta \sigma_v \rangle \rangle &= \alpha \gamma \langle \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle \rangle \\ &+ (\alpha \delta + \beta \gamma) \langle \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle \rangle \\ &+ \beta \delta \langle \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle \rangle \end{aligned}$$

i.e. $\langle \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle \rangle := L$

$\langle \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle \rangle := M$

$\langle \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle \rangle := N$

$$\begin{aligned} &:= \alpha \gamma L + (\alpha \delta + \beta \gamma) M \\ &+ \beta \delta N. \end{aligned}$$

IV.8 (Tartakna)

$\gamma \subset S$ eğri olsun.

$\sigma: U \rightarrow S$ γ 'ye içeren
bir chart olsun.

İkinci Temel form: $L du^2 + 2M du dv + N dv^2$
 $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$

0 zaman

$$K_n = \langle \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \rangle$$

(İkinci Temel formu kullanarak normal eğriliği hesaplamak mümkün)