

# Diferensiyel Geometri

Eğriler, Yüzeyler, Yüksek Boyutlarda "Manifoldler"

Örnekler

$$S^1 : \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$$

Heliks :

$$\{ (\sin t, \cos t, t) : t \in \mathbb{R} \}$$

Yüzeyler

$$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

$$S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

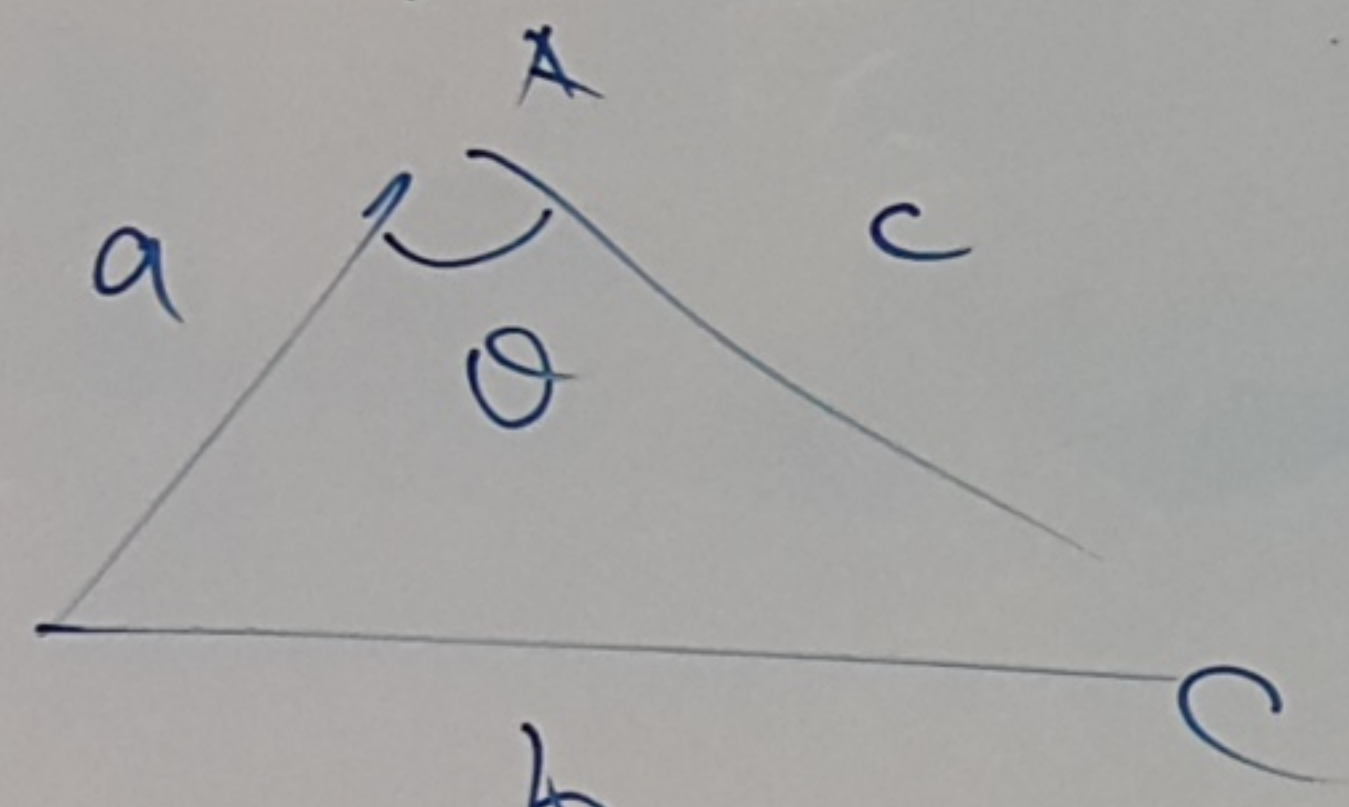
$$\{ (x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

a) Dünya Düz değil (16<sup>inci</sup> yüzyıl)

Bunu görmek için A, B, C noktaları arasındaki en küçük mesafeleri bulup, ve ençları bulup



$$b^2 > a^2 + c^2 - 2ac \cos \theta \text{ olduğunu}$$

fark edip öğrenebiliriz

Düz olmak : Yerel bir özelliğidir.

Bunu Yerel bir hesaplama ile nasıl öğrenebiliriz?

b) Dünya üzerinde mesafeler nasıl ölçülür?

(Varsayalım : Dünya  $\sim S^2$ )

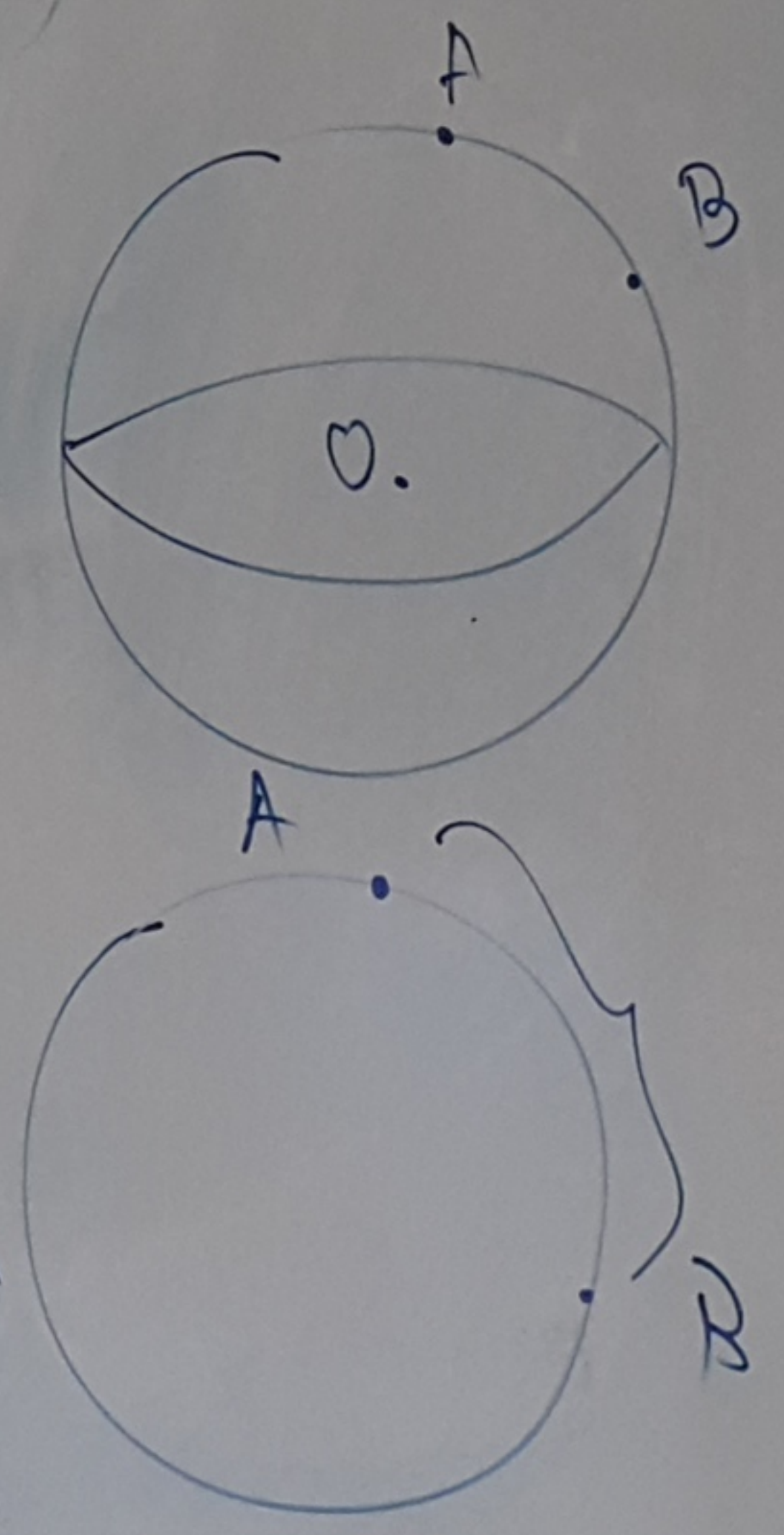
A, B ve Merkezi 'O'

dan geçen bir

Düzlem bulunuz : X

$$X \cap S^2 \sim S^1$$

Mesafe : Bu  $S^1$  üzerindeki mesafe'dir.



# 1 Eğriler

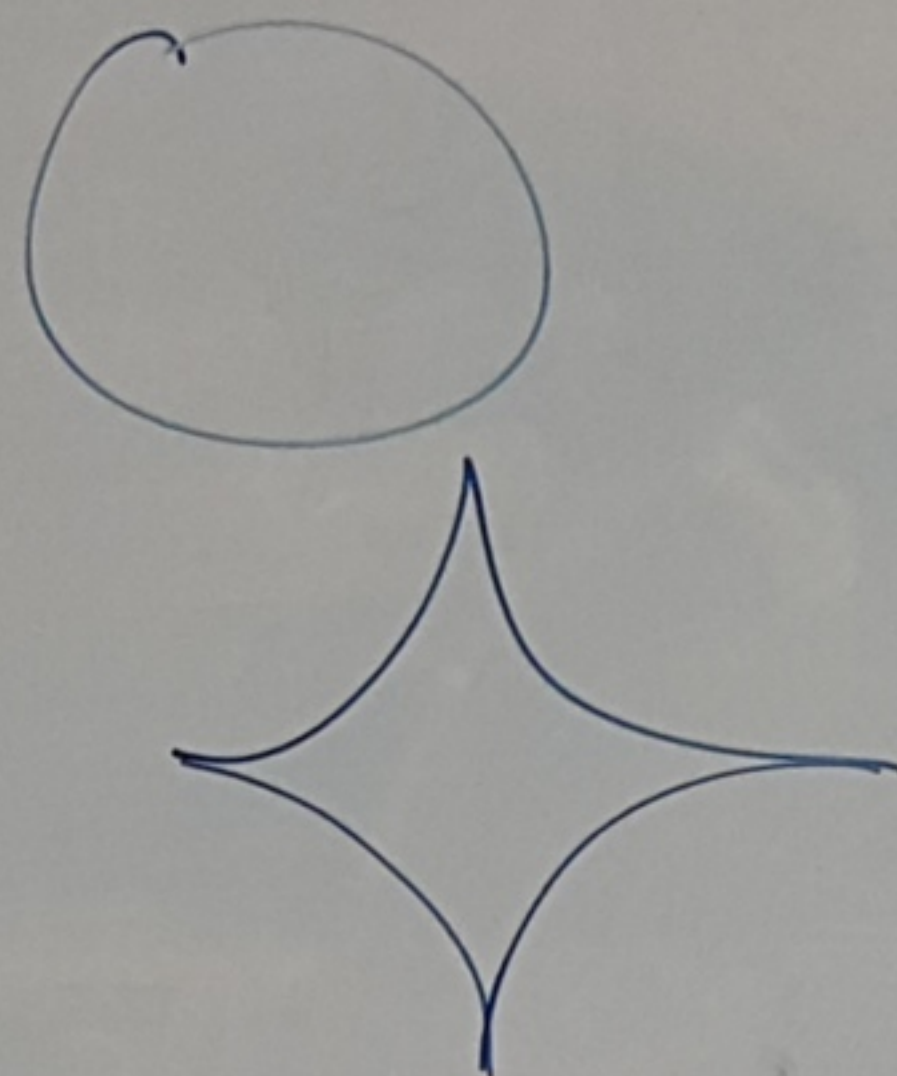
örnek  $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

$C = \{(x, y) \mid x^{2/3} + y^{2/3} = 1\}$

Astroid

Tanım (Parametrik Eğri)  
 $\phi: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonksiyon.

$C = \{\phi(t) : t \in (\alpha, \beta)\}$  Parametrik  
 eğri denir.



örnekler

a)  $S^1 = \{( \cos t, \sin t ) : t \in [0, 2\pi)\}$

b) Ellipse:  $\{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$

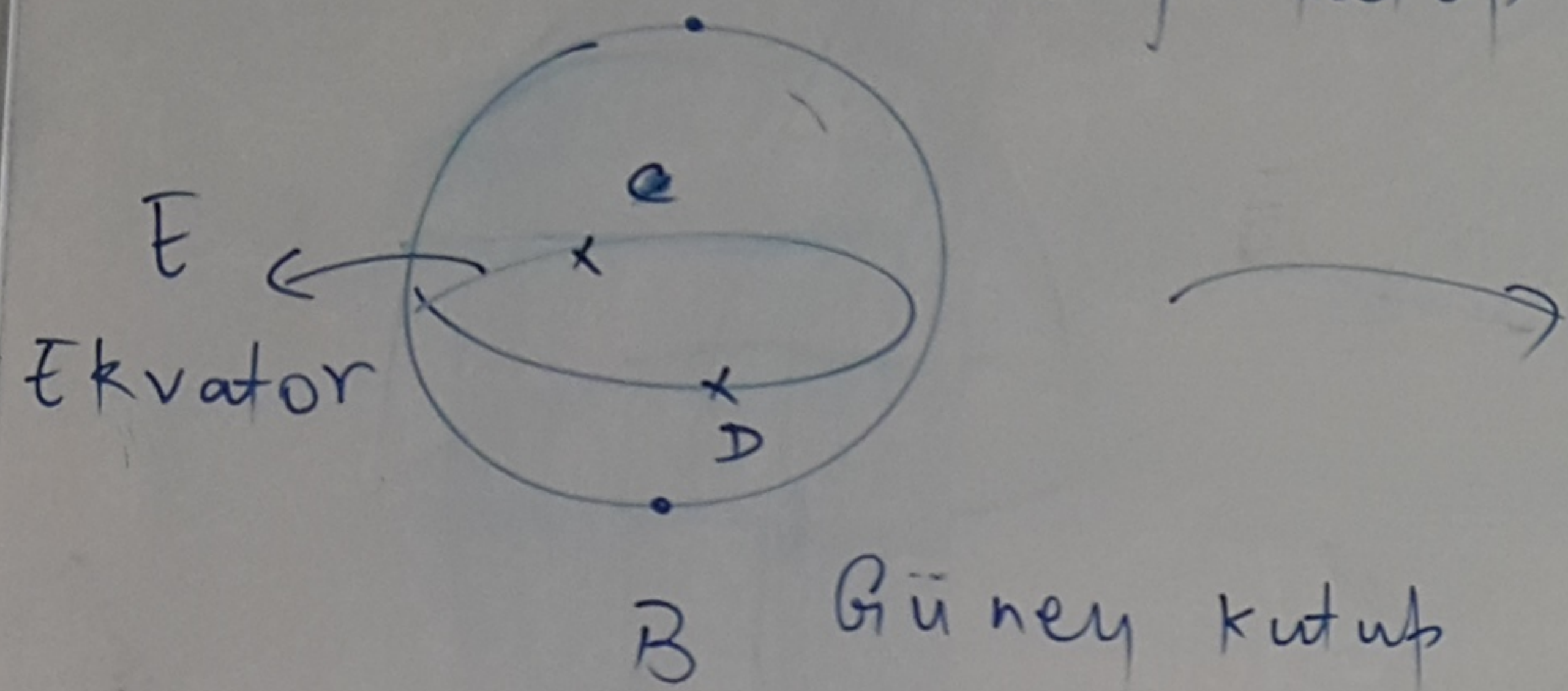
$\sim \{(a \cos t, b \sin t) : t \in [0, 2\pi)\}$

c) Heliks  $\{(\sin t, \cos t, t) : t \in \mathbb{R}\}$

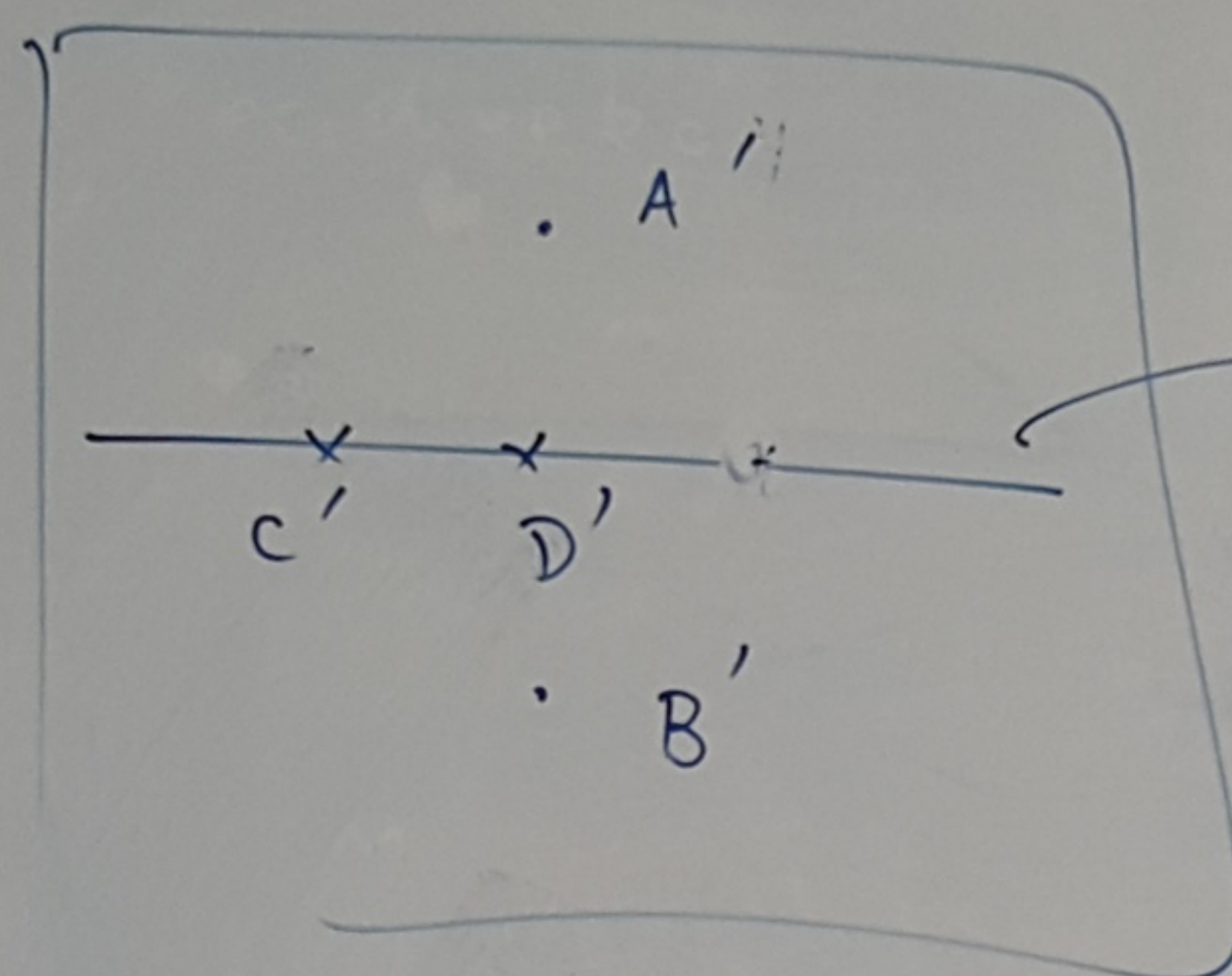
4

# c) Dünyanın Haritası yapmak

- Küçük Bölgeler için : Mesafeler Aynı Kalacak
- A : Kuzey kutup



C, D ekvator üzerinde



$A'C' = A'D'$  mümkün değil!

Dünya 2-D'de mesafe koruması şeklinde çizmek mümkün değil

Mercator (~1580'ler) ③

Mesafeleri korumak imkansız.

Ama Şekiller koruyabilir miyiz?

Evet

Not: Her

Yüzey bu mümkün değil!

Ama  $S^2$  için mümkün.

Hatırlatma

Taylor formula

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \in (a, b)$$

$k+1$  defa türevlenebilir olsun

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + f''(a) \cdot \frac{h^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!} h^{k+1}$$

Not  $k=1$

$$f(a+h) = f(a) + f'(c) \cdot h$$

(Ortalama değer thm.)

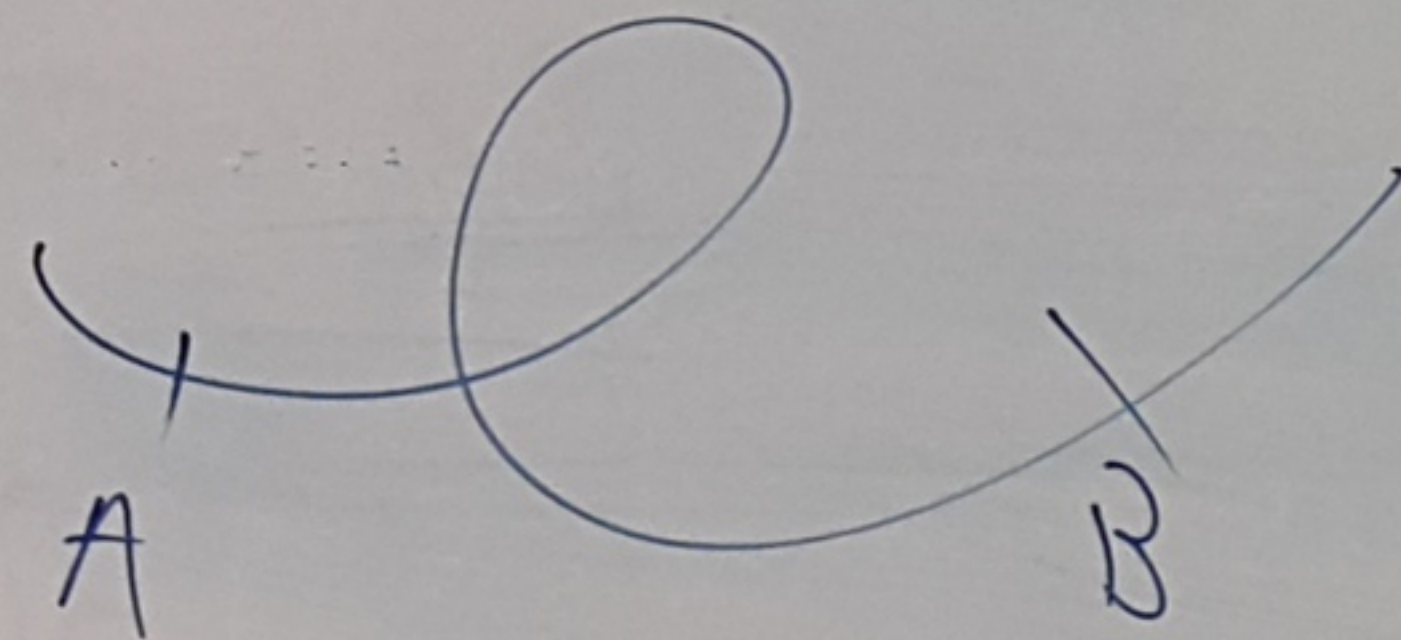
bir  $c \in (a, a+h)$   
için

bin  $c \in (a, a+h)$   
için.

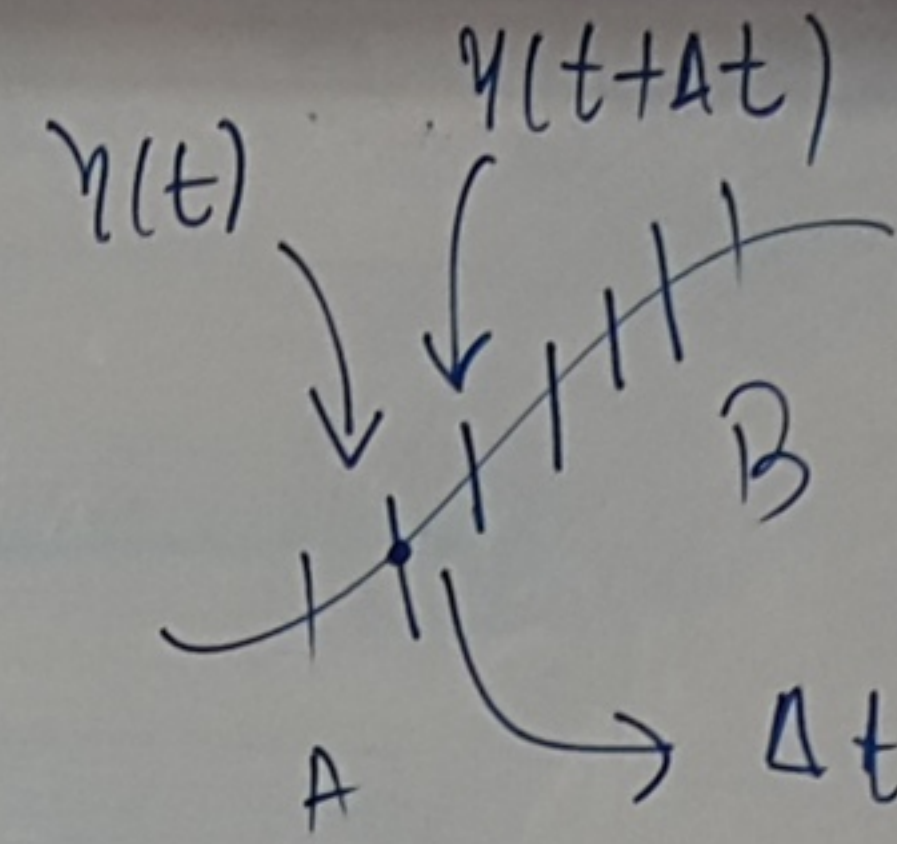
Tanım Düzgün Eğri  
(Smooth)

Eğer  $\phi$  Düzgün ise, Sonsuz  
eğri  $\{ \phi(t) : t \in [\alpha, \beta] \}$  defa  
türevlenebilir  
düzgün denir.

Uzunluk



A - B  
Mesafe ?



Eğri :  $\{ \gamma(t) : t \in [\alpha, \beta] \}$  (5)

$\Delta t \approx 0 \Rightarrow \gamma(t)$  ve  $\gamma(t+\Delta t)$   
arasındaki eğri  
parçası hemen  
hemen bir doğru  
parçası  
 $\gamma(t+\Delta t) = \gamma(t) + \dot{\gamma}(t)(\Delta t) + O(\Delta t^2)$   
 $\| \gamma(t+\Delta t) - \gamma(t) \| \approx (\Delta t) \| \dot{\gamma}(t) \|^2$

Not  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

$$\dot{\gamma}(t) = \left( \frac{d \cos t}{dt}, \frac{d \sin t}{dt} \right) = (-\sin t, \cos t)$$

b) Astroid

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1$$

$$\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) : 0 \leq t < 2\pi$$

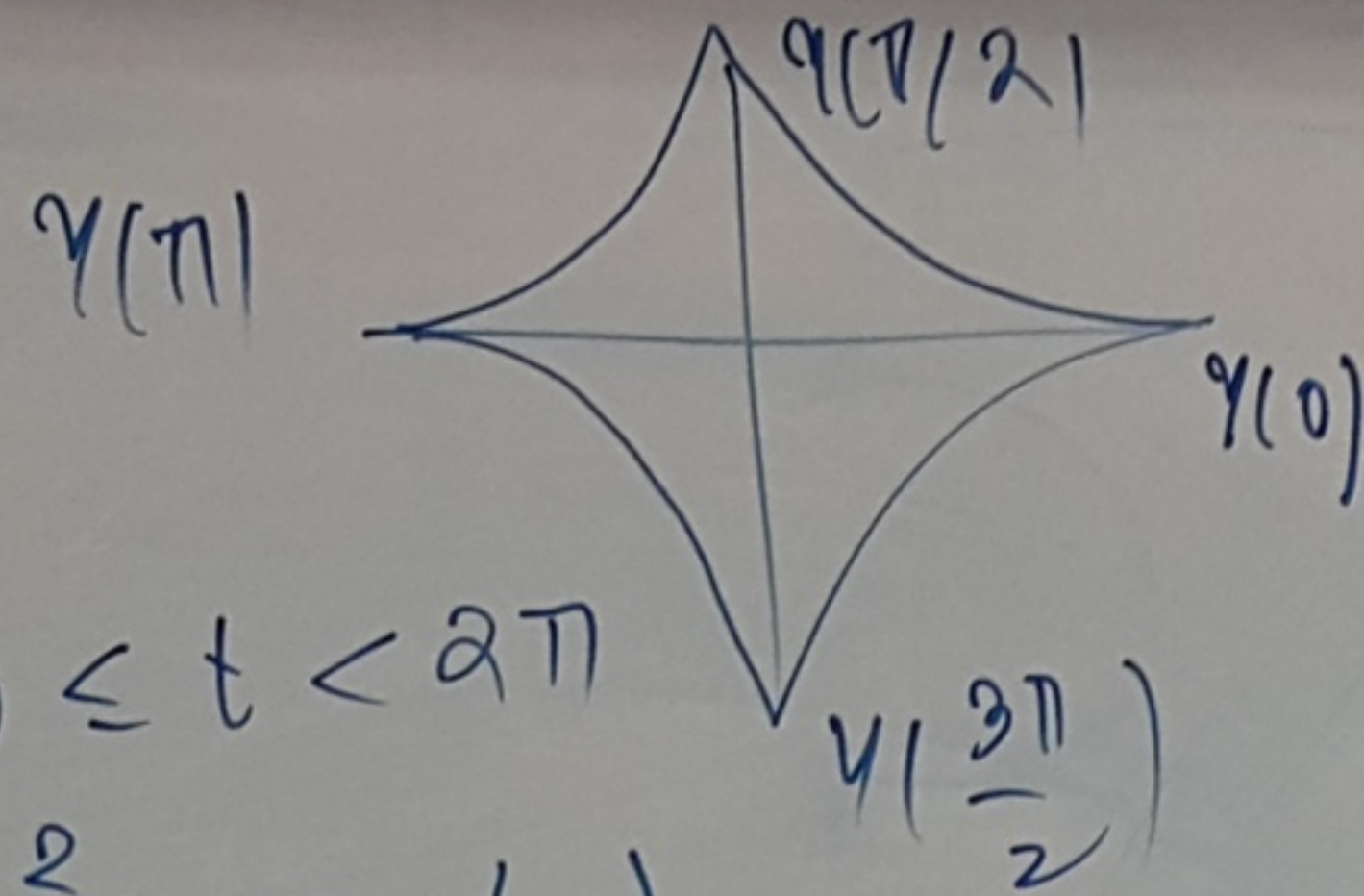
$$\dot{\gamma}(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t)$$

Yay - Uzunluğu

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 3 |\cos t \sin t| dt = 12 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt$$

$$= 12 \cdot 0$$



Not Aynı eğri için birden fazla parametrisasyonu var. (8)

$$y = x^2 \quad (\text{Parabola})$$

$$\gamma_1(t) = (t, t^2) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\gamma_2(t) = (t^3, t^6) \quad t \in \mathbb{R}$$

Yarın

→ Yay - Uzunluğun Parametrisasyonu ile bağımsız.

→ Yay - Uzunluğun İyi bir Parametrisasyonu var.

$$= 12,0$$

Yay - uzunluğun İyi bir Parametrizasyonu verir.

$$\| \gamma(t + \Delta t) - \gamma(t) \| \approx (\Delta t) \| \dot{\gamma}(t) \|^1$$

Tanım (Yay Uzunluğu)  
Arc length.

$\{ \gamma(t) : t \in (\alpha, \beta) \}$  bir eğri olsun

o zaman  $s(t) = \int_{t_0}^t \| \dot{\gamma}(t) \| dt$

Sabit

(Referans noktası)

$\gamma(t_0)$  ve  $\gamma(t)$  arasındaki

yay - uzunluğu denir

Örnek a)  $s$  'nin yay - uzunluğu nedir (7)

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad 0 \leq t < 2\pi$$

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t)$$

$$Y.U = \int_0^{2\pi} \| \dot{\gamma}(t) \| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = 2\pi \quad \checkmark$$

