Öklid algoritması ve ortak ölçüsü olmama

$$2x^2 = y^2$$

Diofant denkleminin tamsayı çözümü yoktur. Aynı anlamda, bir karenin kenar ve köşegeninin ortak ölçüsü yoktur. Nitekim varsa, kenar, ölçünün s katı, ve köşegen, ölçünün d katı, olsun. O zaman

$$2s^2 = d^2, \qquad s^2 = d^2 - s^2 = (d+s)(d-s), \qquad \frac{s}{d+s} = \frac{d-s}{s}, \qquad 0 < d - s < s.$$

Ayrıca $\operatorname{ebob}(d, s) = \operatorname{ebob}(d + s, s)$, ve Öklid Algoritmasıyla bulunabilir. İlk adım olarak

$$(d+s) = s \cdot 2 + (d-s)$$

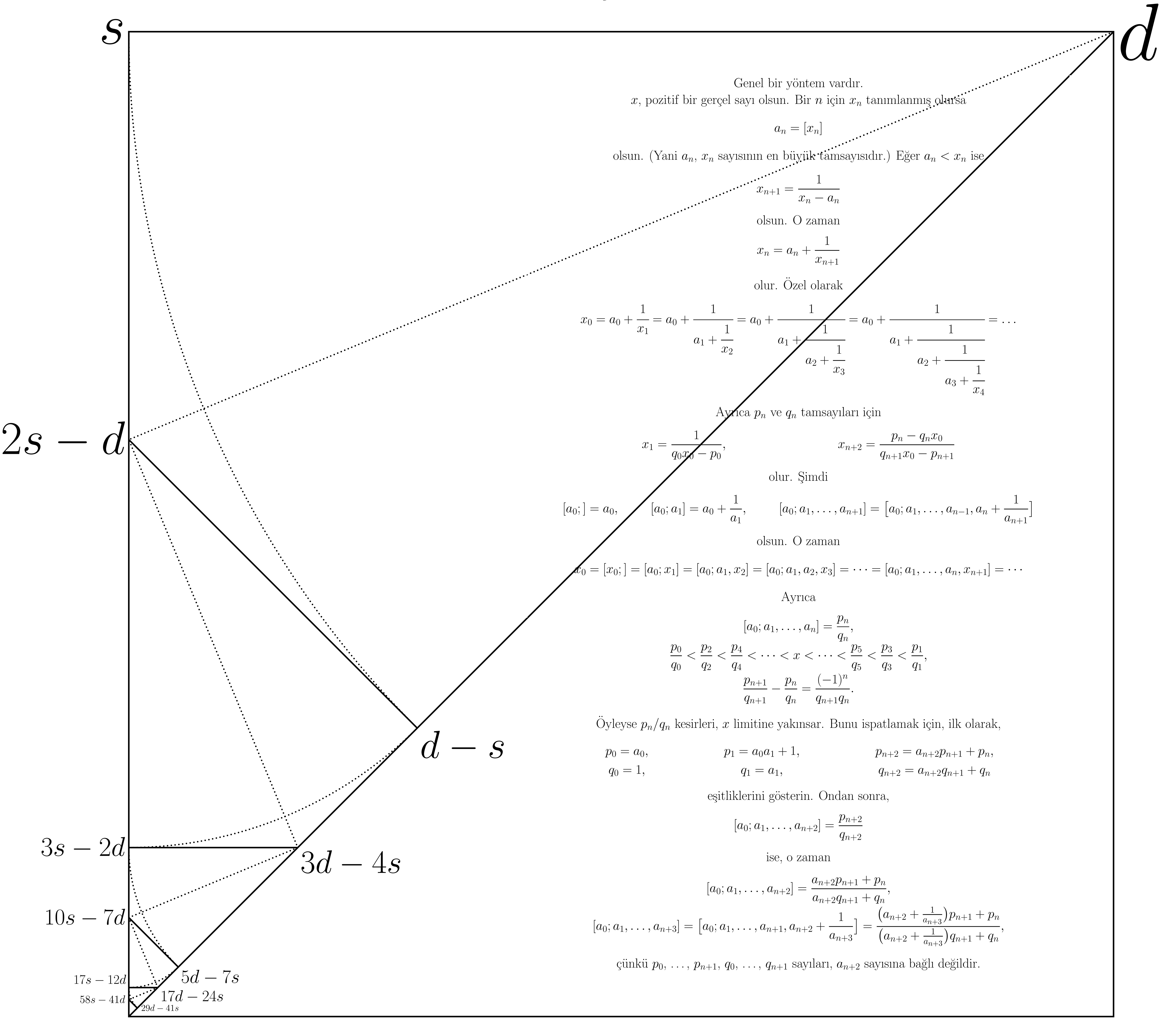
eşitliğimiz vardır. Ama $\frac{d+s}{s} = \frac{s}{d-s}$ eşitliği yüzünden Algoritmanın her adımı aynı şekilde olacak:

$$\begin{aligned} s &= (d-s) \cdot 2 + (3s - 2d), \\ (d-s) &= (3s-2d) \cdot 2 + (5d - 7s), \\ (3s-2d) &= (5d-7s) \cdot 2 + (17s - 12d), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

s ile d sayılarının bu kombinezonları, figürdeki uzunlukturlar. Algoritma ve figür bitmez; dolayısıyla s ile d, tamsayılar olamaz. Ancak Algoritma, $\sqrt{2}$ limitine yakınsayan

$$1, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{17}{12}, \quad \frac{41}{29}, \quad \frac{99}{70}, \quad \frac{239}{169}, \quad \frac{577}{408}, \quad \frac{1393}{985}, \quad \frac{3363}{2378}, \quad \frac{8119}{5741}, \quad \ldots$$

bir dizi oluşturur.



Genel bir yöntem vardır.
x, pozitif bir gerçel sayı olsun. Bir n için x_n tanımlanmış olursa

$$a_n = [x_n]$$

olsun. (Yani a_n, x_n sayısının en büyük tamsayısıdır.) Eğer $a_n < x_n$ ise

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}$$

olsun. O zaman

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$$

olur. Özel olarak

$$x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{x_4}}}} = \ldots$$

Ayrıca p_n ve q_n tamsayıları için

$$x_1 = \frac{1}{q_0 x_0 - p_0}, \qquad x_{n+2} = \frac{p_n - q_n x_0}{q_{n+1} x_0 - p_{n+1}}$$

olur. Şimdi

$$[a_0;] = a_0, \qquad [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}, \qquad [a_0; a_1, \ldots, a_{n+1}] = \Bigl[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\Bigr]$$

olsun. O zaman

$$x_0 = [x_0;] = [a_0; x_1] = [a_0; a_1, x_2] = [a_0; a_1, a_2, x_3] = \cdots = [a_0; a_1, \ldots, a_n, x_{n+1}] = \cdots$$

Ayrıca

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n},$$
$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \cdots < x < \cdots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1},$$
$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n+1} q_n}.$$

Öyleyse p_n/q_n kesirleri, x limitine yakınsar. Bunu ispatlamak için, ilk olarak,

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & p_1 &= a_0 a_1 + 1, & p_{n+2} &= a_{n+2} p_{n+1} + p_n, \\ q_0 &= 1, & q_1 &= a_1, & q_{n+2} &= a_{n+2} q_{n+1} + q_n \end{aligned}$$

eşitliklerini gösterin. Ondan sonra,

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{n+2}] = \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$$

ise, o zaman

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{n+2}] = \frac{a_{n+2} p_{n+1} + p_n}{a_{n+2} q_{n+1} + q_n},$$
$$[a_0; a_1, \ldots, a_{n+3}] = \Bigl[a_0; a_1, \ldots, a_{n+1}, a_{n+2} + \frac{1}{a_{n+3}}\Bigr] = \frac{\bigl(a_{n+2} + \frac{1}{a_{n+3}}\bigr) p_{n+1} + p_n}{\bigl(a_{n+2} + \frac{1}{a_{n+3}}\bigr) q_{n+1} + q_n},$$

çünkü p_0, …, p_{n+1}, q_0, …, q_{n+1} sayıları, a_{n+2} sayısına bağlı değildir.

David Pierce dpierce@msgsu.edu.tr http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/ Matematik Bölümü, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, İstanbul