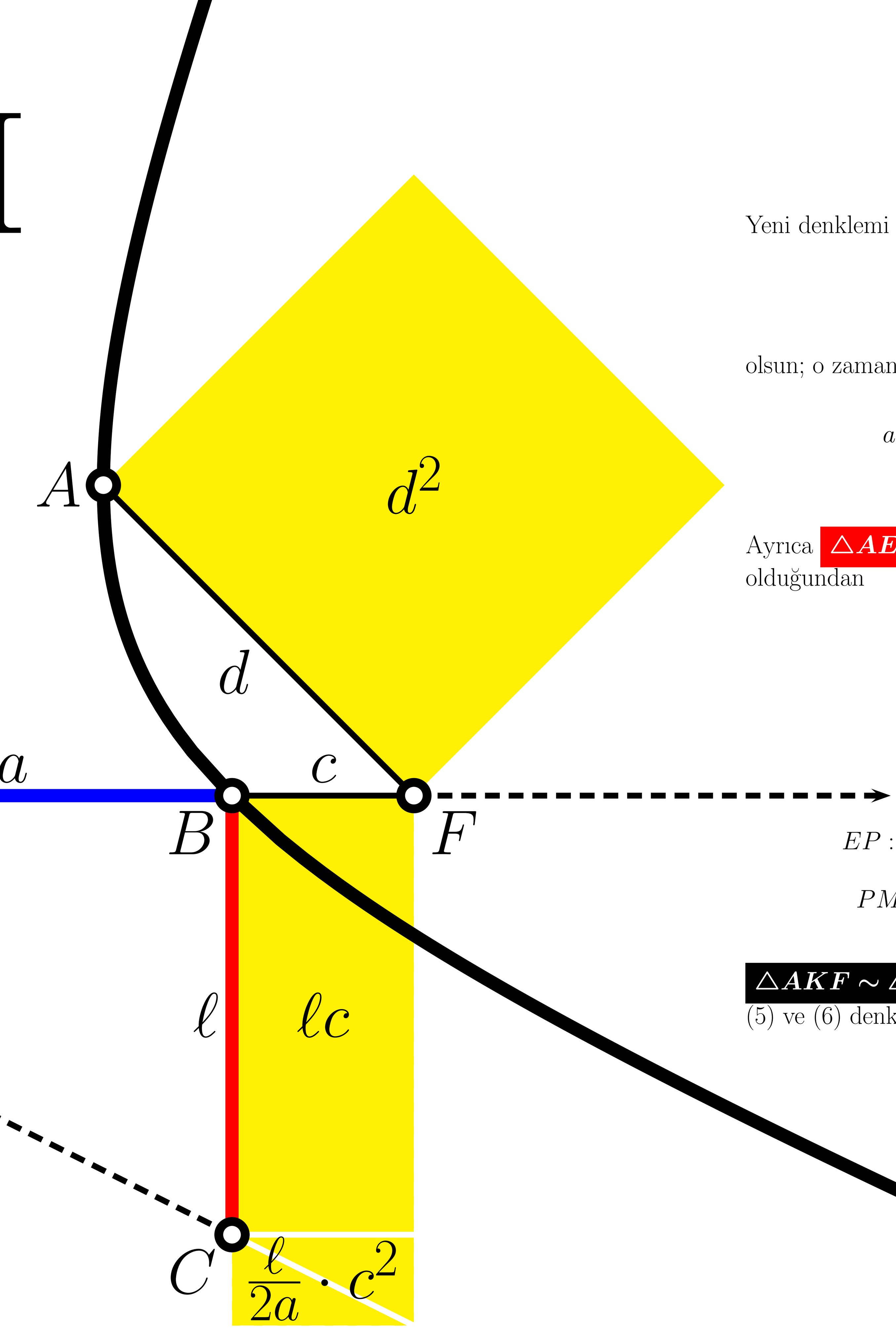
ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Şekillerde AB eğrisi,

- **dikey kenarı** BC olan,
- **yanlamasına kenarı** BD olan, ve
- **merkezi** E olan

hiperboldür, ve

- AF, hiperbolün bir **ordinatıdır,**
- BF, ona karşılık gelen **absistir.**



Bu durumda

$$BC = \ell,$$
$$EB = a, \qquad BF = c, \qquad FA = d$$

ise

$$d^2 = \ell c + \frac{\ell}{2a}\cdot c^2. \tag{1}$$

Özel olarak d^2 karesi, ℓc dikdörtgenini aşar. Bu nedenle Pergeli Apollonius, eğriye ὑπερβολή (“aşma”) der. (1) eşitliğinden

$$d^2 = \frac{\ell}{2a}\cdot\left((a+c)^2 - a^2\right). \tag{2}$$

(1) ve (2) eşitlikleri tamamen geneldir. Tüm ordinatlar birbirine paraleldir. GH herhangi bir ordinat ve

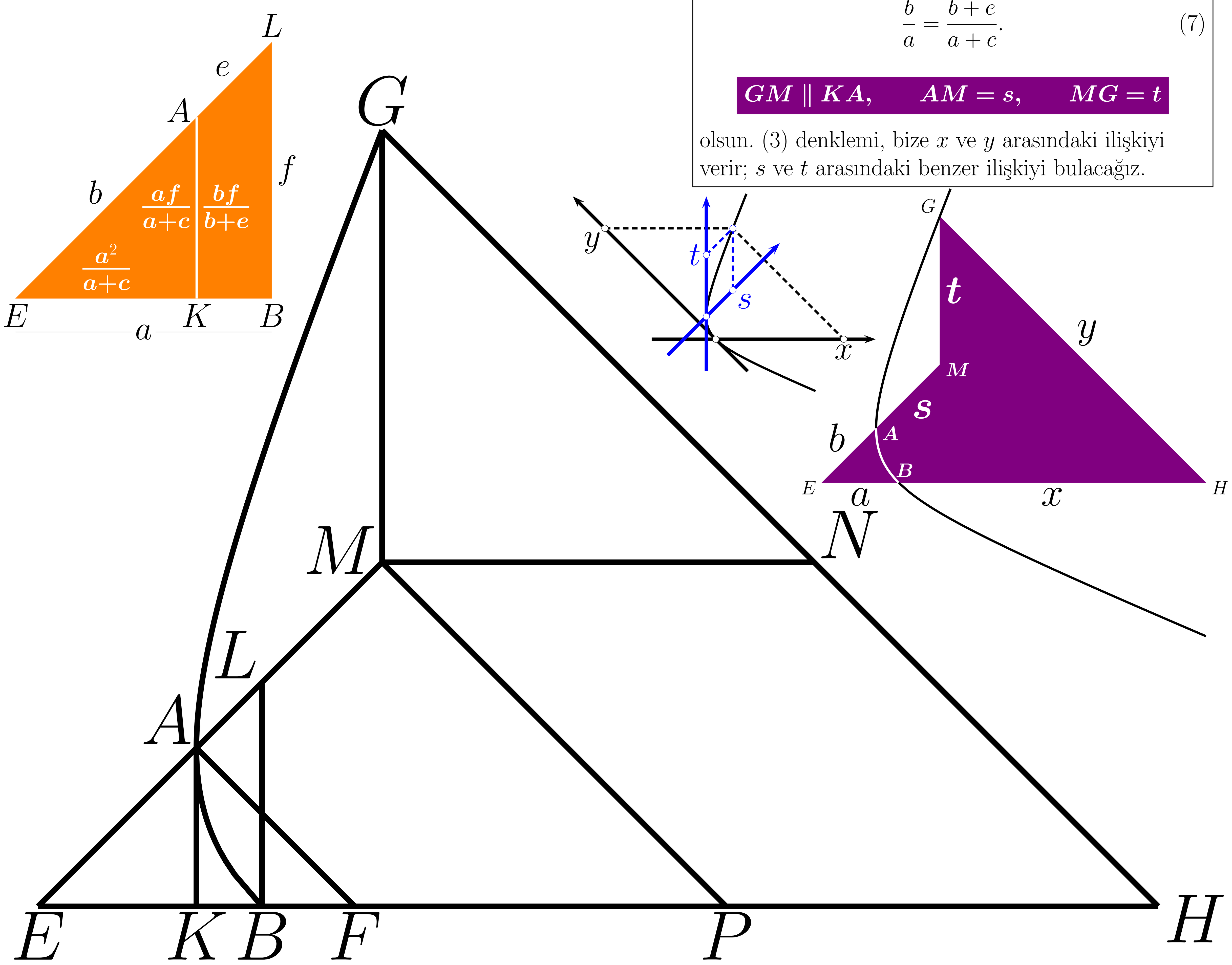
$$BH = x, \qquad HG = y$$

ise (2) eşitliğine göre

$$y^2 = \frac{\ell}{2a}\left((a+x)^2 - a^2\right),$$

dolayısıyla

$$\frac{y^2}{d^2} = \frac{(a+x)^2 - a^2}{(a+c)^2 - a^2}. \tag{3}$$



$$EK : EB :: EB : EF, \tag{4}$$
$$BL \parallel KA,$$
$$EA = b, \qquad AL = e, \qquad LB = f$$

olsun. (4) orantısından, $EF = a + c$ olduğundan

$$EK = \frac{a^2}{a+c};$$

$\triangle AKE \sim \triangle LBE$ benzerliğinden

$$AK = \frac{bf}{b+e}, \qquad AK = \frac{a^2}{a+c}\cdot\frac{a}{f} = \frac{af}{a+c}, \tag{5}$$
$$KF = a + c - \frac{a^2}{a+c} = \frac{(a+c)^2 - a^2}{a+c}. \tag{6}$$

(5) denklemlerinden

$$\frac{b}{a} = \frac{b+e}{a+c}. \tag{7}$$

$$GM \parallel KA, \qquad AM = s, \qquad MG = t$$

olsun. (3) denklemi, bize x ve y arasındaki ilişkiyi verir; s ve t arasındaki benzer ilişkiyi bulacağız.

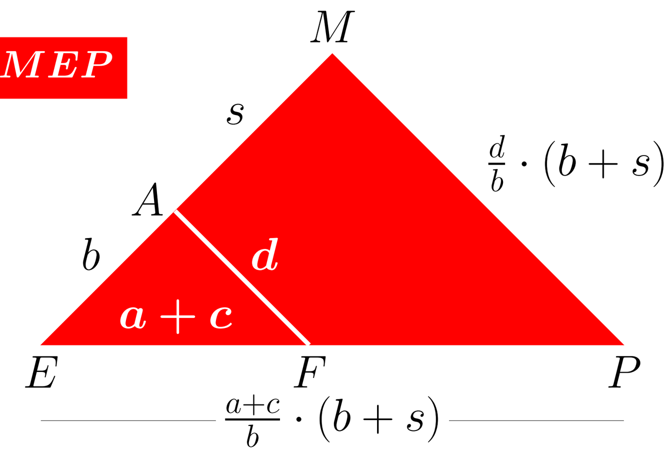
Yeni denklemi bulmak için

$$MN \parallel BH, \qquad MP \parallel AF$$

olsun; o zaman

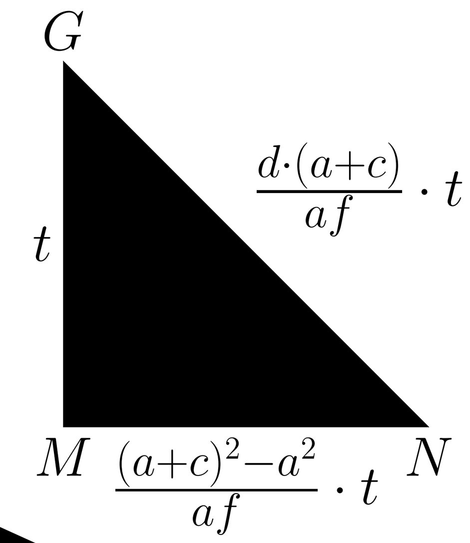
$$a + x = EH = EP + PH = EP + MN, \tag{8}$$
$$y = HG = HN + NG = PM + NG. \tag{9}$$

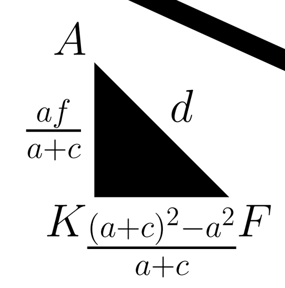
Ayrıca $\triangle AEF \sim \triangle MEP$ olduğundan



$$EP : EM :: EF : EA, \qquad EP = \frac{a+c}{b}\cdot(b+s), \tag{10}$$
$$PM : EM :: FA : EA, \qquad PM = \frac{d}{b}\cdot(b+s); \tag{11}$$

$\triangle AKF \sim \triangle GMN$ olduğundan, (5) ve (6) denklemlerinden





$$MN : MG :: KF : KA, \qquad MN = \frac{(a+c)^2 - a^2}{af}\cdot t, \tag{12}$$
$$NG : MG :: FA : KA, \qquad NG = \frac{d\cdot(a+c)}{af}\cdot t. \tag{13}$$

(8), (10), ve (12) eşitliklerine göre

$$a + x = \frac{a+c}{b}\cdot(b+s) + \frac{(a+c)^2 - a^2}{af}\cdot t, \tag{14}$$

ve (9), (11), ve (13) eşitliklerine göre

$$y = \frac{d}{b}\cdot(b+s) + \frac{d\cdot(a+c)}{af}\cdot t. \tag{15}$$

Şimdi (14) eşiliğinden

$$\begin{aligned}\frac{(a+x)^2 - a^2}{(a+c)^2 - a^2} &= \frac{1}{(a+c)^2 - a^2}\cdot \\ &\quad\cdot\left(\left(\frac{a+c}{b}\cdot(b+s) + \frac{(a+c)^2 - a^2}{af}\cdot t\right)^2 - a^2\right) \\ &= \frac{(a+c)^2}{(a+c)^2 - a^2}\cdot\left(\frac{b+s}{b}\right)^2 + \frac{(a+c)^2 - a^2}{a^2f^2}\cdot t^2 + \\ &\quad + 2\cdot\frac{a+c}{abf}\cdot(b+s)\cdot t - \frac{a^2}{(a+c)^2 - a^2},\end{aligned}$$

ve (15) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\frac{y^2}{d^2} &= \frac{1}{d^2}\cdot\left(\frac{d}{b}\cdot(b+s) + \frac{d\cdot(a+c)}{af}\cdot t\right)^2 \\ &= \left(\frac{b+s}{b}\right)^2 + \frac{(a+c)^2}{a^2f^2}\cdot t^2 + 2\cdot\frac{a+c}{abf}\cdot(b+s)\cdot t.\end{aligned}$$

Bunları (3) denklemine koyarak ve basitleştirerek

$$\begin{aligned}&\left(\frac{b+s}{b}\right)^2 + \frac{(a+c)^2}{a^2f^2}\cdot t^2 \\ &= \frac{(a+c)^2}{(a+c)^2 - a^2}\cdot\left(\frac{b+s}{b}\right)^2 + \frac{(a+c)^2 - a^2}{a^2f^2}\cdot t^2 - \frac{a^2}{(a+c)^2 - a^2};\end{aligned}$$

benzer terimleri bir araya getirerek

$$\begin{aligned}\frac{t^2}{f^2} &= \frac{a^2}{(a+c)^2 - a^2}\cdot\left(\frac{b+s}{b}\right)^2 - \frac{a^2}{(a+c)^2 - a^2} \\ &= \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{(b+s)^2 - b^2}{(a+c)^2 - a^2}.\end{aligned}$$

Son olarak (7) eşitliğinden

$$\frac{t^2}{f^2} = \frac{(b+s)^2 - b^2}{(b+e)^2 - b^2}.$$

David Pierce dpierce@msgsu.edu.tr http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/ Matematik Bölümü Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi İstanbul