# Koni kesitleri

David Pierce

25 Aralık 2012

Popüler Matematik, Matematik Bölümü, MSGSÜ
dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

**Özet**

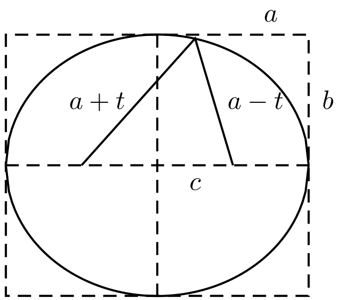
Neden koni kesitlerine parabol, hiperbol, veya elips denir.
Why conic sections are called parabolas, hyperbolas, or ellipses.

## İçindekiler

# 1 Parabol, hiperbol, ve elips

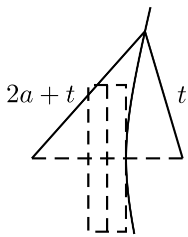
Bir **koni kesiti,** bir koni yüzeyi ile bir düzlemin kesişimi olan bir eğridir. Milattan önce 3. yüzyılda Pergeli Apollonius [1, 2], koni kesitlerine **parabol, hiperbol,** ve **elips** (yani παραβολή, ὑπερβολή, ve ἔλλειψις) adlarını verdi. Bu eğrileri ip kullanarak çizebiliriz:

Elipse iki **odaktan** giden uzaklıkların toplamı değişmez.



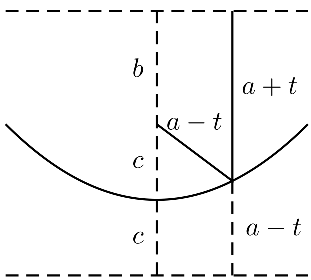

$$a^2 - b^2 = c^2,$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hiperbole iki odaktan giden uzaklıkların farkı değişmez.




$$a^2 + b^2 = c^2,$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Parabole bir odaktan ve **doğrultmandan** giden uzaklıkları birbirine eşittir, dolayısıyla odaktan ve doğrultmana paralel olan bir doğrudan eğriye giden uzaklıkların toplamı değişmez.




$$2a - b = 2c,$$
$$y = \frac{x^2}{4c}.$$

## 2 Kelimeler

Parabol, hiperbol, ve elips adlarının normal anlamları vardır. Bu anlamlar, yukarıdaki özellikleri anlatmaz:

βάλλω (*fiil*) atmak, fırlatmak.

βολή (*isim*) atma, fırlatma.

παραβάλλω (*fiil*) karşılaştırmak, yaklaşmak.

παραβολή (*isim*) karşılaştırma, yaklaşma, ilişki, benzeme, benzerlik.

ὑπερβάλλω (*fiil*) geçmek, aşmak.

ὑπερβολή (*isim*) geçme, aşma, fazlalık.

λείπω (*fiil*) bırakmak, eksik olmak.

λεῖψις (*isim*) eksiklik.

ἐλλείπω (*fiil*) bir yana bırakmak, arkada bırakmak.

ἔλλειψις (*isim*) eksiklik (bu kelime, [3] kaynağında değil).

## 3 Oranlar, orantılar, ve benzerlik

Sınırlı doğrular, alanlar, ve cisimler, **büyüklük** örnekleridir.

Bir büyüklük **çoğaltılabilir.** Her $n$ tamsayısı için, bir büyüklüğün $n$ katı vardır. Büyüklük $A$ ise, onun $n$ katı,

$$nA$$

olarak yazılabilir.

$A$ ile $B$, büyüklük olsunlar. Eğer bir $n$ tamsayısı için,

$$nA > B, \qquad nB > A$$

olursa, o zaman büyüklüklerin **oranı** vardır. (Bu tanım, Öklid'in *Öğeler*'inin V. kitabının 4. tanımıdır [4, 5, 6, 7].) $A$ büyüklüğünün $B$ büyüklüğüne oranı için

$$A/B, \qquad\qquad A : B$$

yazılabilir. Ancak bir oran çizilemez: soyuttur. (Aslında bir denklik sınıfı olacak.)

$A$ ile $B$ büyüklüklerinin oranı olsun, ve $C$ ile $D$ büyüklüklerinin oranı olsun. Tüm $n$ ve $m$ tamsayıları için

$$\begin{aligned} nA > mB &\iff nC > mD, \\ nA = mB &\iff nC = mD, \\ nA < mB &\iff nC < mD \end{aligned}$$

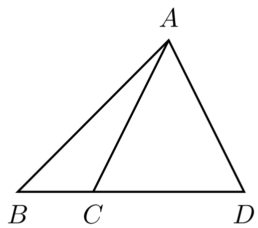
olduğunu varsayalım. O zaman $A$ büyüklüğünün $B$ büyüklüğüne oranı, $C$ büyüklüğünün $D$ büyüklüğüne oranı ile **aynıdır.** Ayrıca $A$, $B$, $C$, ve $D$ büyüklükleri, **orantılıdır** [*Öğeler* V, 5. tanım], ve bu durumda

$$A : B :: C : D, \qquad\qquad \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

ifadeleri yazılabilir. (Önceki ifadeyi tercih ederim, çünkü bir orantıda oranlar sadece eşit değil, aynıdır, ama iki büyüklüğün kendileri, aynı olmadan eşit olabilir.) Orantı, oranları olan büyüklük çiftleri arasında bir denklik bağıntısıdır.

*Öğeler*'in V. kitabında kolay kurallar gösterilir, mesela

$$A : B :: C : D \implies A + B : B :: C + D : D \;\&\; B : A :: D : C.$$



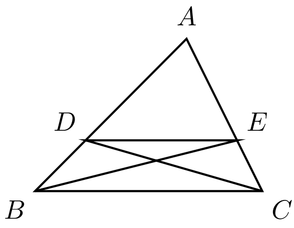

Yüksekliğinin aynı olan üçgenlerin oranı, tabanlarının oranıyla aynıdır [*Öğeler* VI.1]:

$$ABC : ACD :: BC : CD.$$

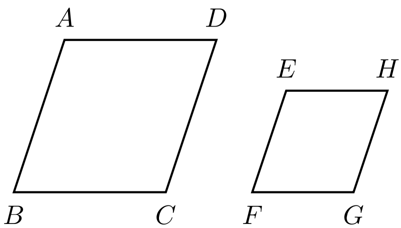
Dolayısıyla, bu şekilde, $DE \parallel BC$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} AD : DB &:: ADE : DBE \\ &:: ADE : DCE \quad [\text{I.37}] \\ &:: AE : EC, \end{aligned}$$

ve tersi de doğrudur [*Öğeler* VI.2].

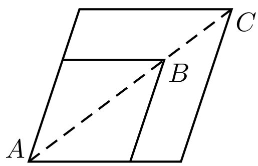



Bu şekilde, $DE \parallel BC$ durumunda, $ABC$ ile $ADE$ üçgenleri, birbirine **benzerdir** [VI, 1. tanım].




$ABCD$ ile $EFGH$ paralelkenarlarında $ABC$ ile $EFG$ açıları birbirine eşit ise ve $AB : BC :: EF : FG$ ise, o zaman paralelkenarlar birbirine **benzerdir** [VI, 1. tanım].

Bu şekilde $AB$ ile $AC$ paralelkenarları birbirine benzerdir ancak ve ancak $A$, $B$, ve $C$ noktaları bir doğrudadır [VI.24, 26].

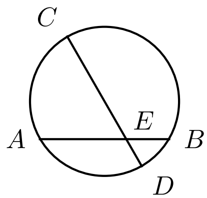


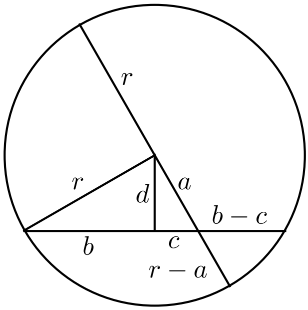

# 4 Çemberler

Bir çemberin bir kirişinin orta dikmesi, çemberin merkezinden geçer [*Öğeler* III.1].

Bir çemberin iki kirişi kesişirse, birinin parçaları tarafından içerilen dikdörtgen, ötekinin parçaları tarafından içerilen dikdörtgene eşittir [III.35], ve o zaman parçalar orantılıdır [VI.16]:

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED,$$
$$AE : CE :: ED : EB.$$





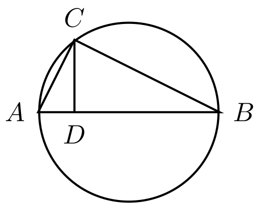

Bunu göstermek için, bir kirişin çemberin merkezinden geçtiğini varsayabiliriz ve Pisagor Teoremini [I.47] kullanabiliriz:

$$\begin{aligned}(r+a)(r-a) &= r^2 - a^2\\ &= b^2 + d^2 - (d^2 + c^2)\\ &= b^2 - c^2\\ &= (b+c)(b-c).\end{aligned}$$

Özel olarak yarım dairenin çapına dikmedeki kare, çapın parçaları tarafından içerilen dikdörtgene eşittir:

$$CD^2 = AD \cdot DB, \quad AD : CD :: CD : DB.$$

(Sonuç olarak $ACB$ açısı dik olmalı.)




# 5 Uygulamalar

Öklid'de παραβάλλω fiili, *yerleştirmek* veya *uygulamak* olarak çevrilebilir. (İngilizcede apply olarak çevrilir.) Bu kelime, birkaç tane *problemlerde* kullanılır:

Önerme I.44:

| | |
|---|---|
| Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν | Verilen bir doğru boyunca |
| τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον | verilen bir üçgene eşit |
| παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν | bir paralelkenar uygulamak |
| ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. | verilen bir düzkenar açıda. |

Önerme I.45:

| | |
|---|---|
| Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον | Verilen bir düzkenar [şekl]e eşit |
| παραλληλόγραμμον συστήσασθαι | bir paralelkenar inşa etmek |
| ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. | verilen bir düzkenar açıda. |

(Burada bir düzkenar açı, çokgen olarak düşünebilir.) Sonuç olarak aşağıdaki problemi çözebiliriz:

Verilen bir doğru boyunca
verilen bir düzkenar [şekl]e eşit
bir paralelkenar uygulamak
verilen bir düzkenar açıda.

VI. kitabında Öklid, son satırda değişiklikler yapar:

Önerme VI.28:

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν
τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον
παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν
ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Verilen bir doğru boyunca
verilen bir düzkenar [şekl]e eşit
bir paralelkenar uygulamak
verilen [paralelkenar]a benzer bir paralelkenar şekli kadar eksik kalan.

(Buradan bir şart çıkardım: Verilen düzkenar [şekl]in [verilen doğrunun] yarı[sın]da çizilmiş eksiğe benzer [şekil]den büyük olmaması gerekir.[1])

Önerme VI.29:

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν
τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον
παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν
ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Verilen bir doğru boyunca
verilen bir düzkenar [şekl]e eşit
bir paralelkenar uygulamak
verilen [paralelkenar]a benzer bir paralelkenar şekli kadar aşan.

[1] δεῖ δὲ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένου ὁμοίου τῷ ἐλλείμματι .

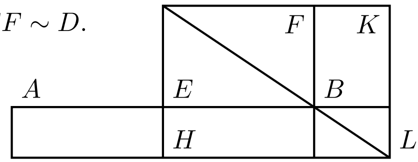
*Son önermenin gösterisi.* Verilen doğru, $AB$ olsun; verilen düzkenar şekil, $C$ olsun; verilen paralelkenar, $D$ olsun.

1. $E$ noktası, $AB$ doğrusunu ikiye bölsün. [I.10]

$$AE = EB.$$

2. $EF$ paralelkenarı, $D$ paralelkenarına benzer olsun. [VI.18]

$$EF \sim D.$$




3. $HK$ paralelkenarı, $EF$ paralelkenarı ile $C$ şeklinin toplamına eşit ve $D$ paralelkenarına benzer olsun. [VI.25]

$$HK = EF + C, \qquad HK \sim D.$$

4. $HB$ paralelkenarı, $BK$ paralelkenarına eşittir. [I.43]

$$HB = BK.$$

5. $AH$ paralelkenarı, $BK$ paralelkenarına eşittir.

$$AH = BK.$$

6. $AL$ paralelkenarı, $HLKB$ *gnomonuna* eşittir (γνώμων bilen; güneş saatinin göstergesi).

$$AL = HLKB.$$

7. Bu gnomon, $C$ şekline eşittir.

$$EF + C = HK = EF + HLKB, \qquad C = HLKB.$$

8. $AL$ paralelkenarı, $C$ şekline eşittir.

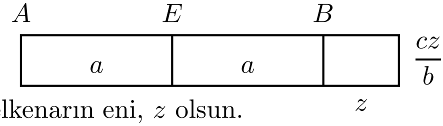
$$AL = C.$$

9. $AL$ paralelkenarı, $AB$ doğrusunu $D$ paralelkenarına benzer $BL$ paralelkenarı kadar aşar. [I.24]

$$BL \sim D. \qquad \square$$

*Kartezyen çözüm.*

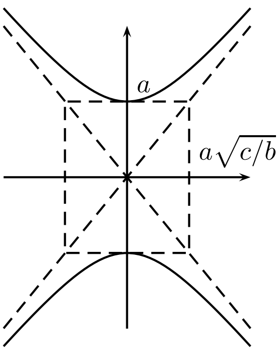
- Verilen doğrunun uzunluğu, $a$ olsun.
- Verilen düzkenar şeklin alanı, $x^2$ olsun.
- Verilen paralelkenarın
  - eni, $b$ olsun;
  - yüksekliği, $c$ olsun.
- İstediğimiz fazla gelen paralelkenarın eni, $z$ olsun.




O zaman yüksekliği, $cz/b$, ve

$$x^2 = (2a + z) \cdot \frac{cz}{b}, \qquad bx^2 = cz \cdot (2a + z).$$

Öyleyse $z$ belirlenir. $\square$

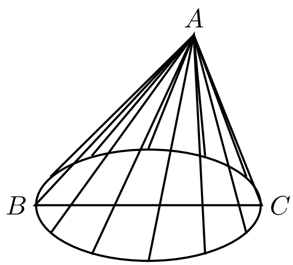



Burada $y = z + a$ ise, o zaman

$$\begin{aligned} z &= y - a, \\ 2a + z &= y + a, \\ bx^2 &= cy^2 - a^2c, \\ cy^2 - bx^2 &= a^2c, \\ \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2c/b} &= 1. \end{aligned}$$

Son denklemler, bir **hiperbolün** denklemleridir.

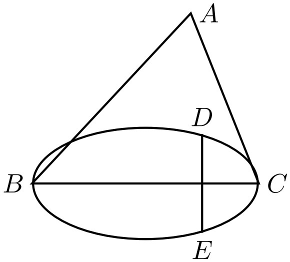
# 6 Koni kesitleri




$A$ bir nokta, ve $BC$, bir dairenin çapı olsun. $A$ noktası, dairenin düzleminde olmasın. O zaman öyle bir **koni** vardır ki

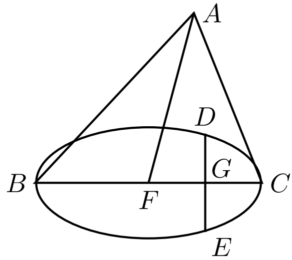
- $A$ noktası, koninin **tepesidir,** ve
- $BC$ dairesi, koninin **tabanıdır.**

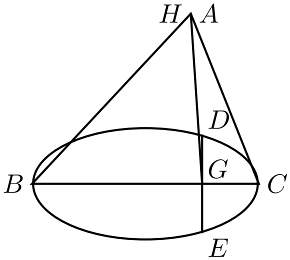
Koninin **yüzeyi,** tepeden tabanın çevresine giden tüm doğruların noktalarından oluşur (veya o doğruları içerir, veya o doğrular tarafından oluşturulur).




Bir düzlem, koninin tabanını $DE$ kirişinde kessin. Bu kirişin orta dikmesinin $BC$ çapı olduğunu varsayabiliriz. [III.3]

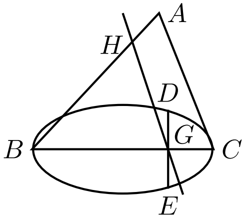
$F$ noktası, $BC$ çapının orta noktası olsun. O zaman $AF$ doğrusu, koninin **eksenidir.** $ABC$ üçgeni, koninin bir **eksen üçgenidir.** Koninin tabanının $BC$ çapı ve $DE$ kirişi, $G$ noktasında kesişsin.

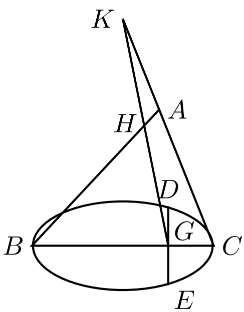


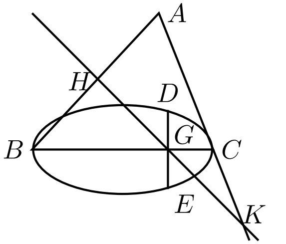




Koninin tabanını kesen düzlem, eksen üçgenini $GH$ doğrusunda kessin; $H$ noktasının $AB$ doğrusunda olduğunu varsayabiliriz. Kesen düzlem, koninin yüzeyini bir $DHE$ eğrisinde keser. Bu eğri, bir **koni kesitidir.** Bu kesit, $A$ noktasını içerirse, o zaman $H$ ile $A$, aynı noktadır, ve kesit, $AD$ ile $AE$ doğrularından oluşur.

- Eğer $GH$ doğrusu, $AC$ doğrusuna paralel ise, kesit bir **paraboldür.**
- Kalan durumda, uzatılırsa, $GH$ ile $AC$ doğruları, bir $K$ noktasında kesişir. Bu nokta,
  - koninin tabanının altındaysa, kesit bir **elipstir,**
  - koninin tepesinin üstündeyse, kesit bir **hiperboldür.**

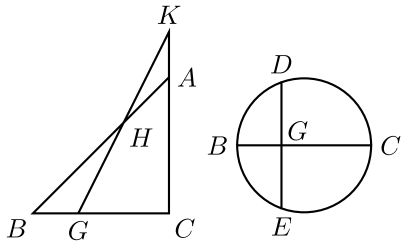


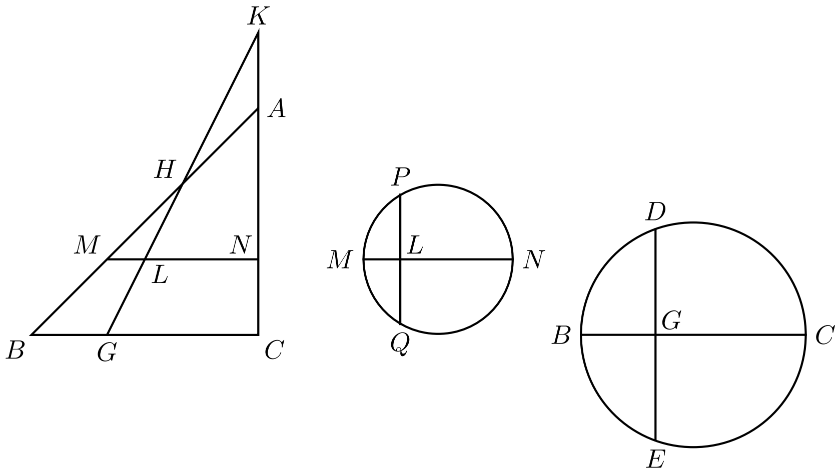



Koni kesitimiz, hiperbol olsun. $DG$ doğrusundaki kare, $BG$ ile $GC$ tarafından içerilen dikdörtgene eşittir [III.35], yani

$$DG^2 = BG \cdot GC.$$



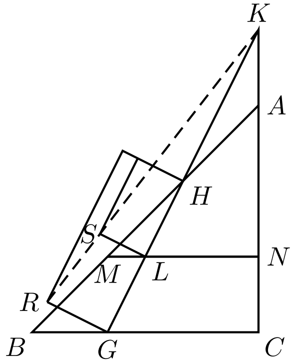

Şimdi tabana paralel olan bir düzlem, koniyi kessin. $HG$ doğrusunu $L$ noktasında kessin, ve eksen üçgenini $MN$ doğrusunda kessin.




O zaman koninin yüzeyi, bir çemberde kesilir, ve koni kesitinin düzlemi, bu çemberi bir $PQ$ kirişinde keser. $MN$ doğrusu, bu çemberin bir çapıdır ve $PQ$ kirişinin orta dikmesidir.

Özel olarak, $PL = LQ$ yüzünden, $HG$ doğrusu, koni kesitinin bir **çapıdır.** Aşağıdaki eşitliğimiz vardır.

$$\frac{DG^2}{PL^2} = \frac{BG \cdot GC}{ML \cdot LN} = \frac{BG}{ML} \cdot \frac{GC}{LN} = \frac{HG}{HL} \cdot \frac{KG}{KL}.$$




Şimdi $GR$ doğrusu, $KG$ doğrusuna dik olsun, ve $RH$ dikdörtgeni, $DG$ doğrusundaki kareye eşit olsun, yani

$$RG \cdot GH = DG^2$$

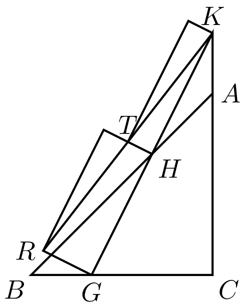
olsun. Benzer şekilde $SH$ dikdörtgeni, $PL$ doğrusundaki kareye eşit olsun, yani

$$SL \cdot LH = PL^2$$

olsun. O zaman

$$\frac{RG}{SL} = \frac{KG}{KL},$$

dolayısıyla $R$, $G$, ve $K$, bir doğrudadır.



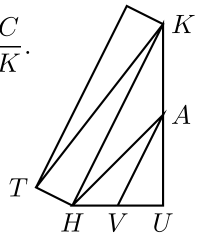

Şimdi $KG$ doğrusuna $H$ noktasındaki dikme, $RK$ doğrusunu $T$ noktasında kessin. O zaman

> Verilen $HT$ doğrusuna
> $DG$ doğrusundaki kareye eşit olan
> $RH$ dikdörtgenini uygulandık
> verilen $KT$ dikdörtgenine benzer bir dikdörtgen kadar aşan
> (ὑπερβάλλον).

Bu yüzden $DHE$ koni kesitine **hiperbol** (ὑπερβολή) denir. Bu tanım ve ispat, Pergeli Apollonius'ün *Koni kesitleri* [1, 2] eserinin I. kitabının 12. önermesinde bulunur. O eserin III. kitabında odak özelliği anlatılır.

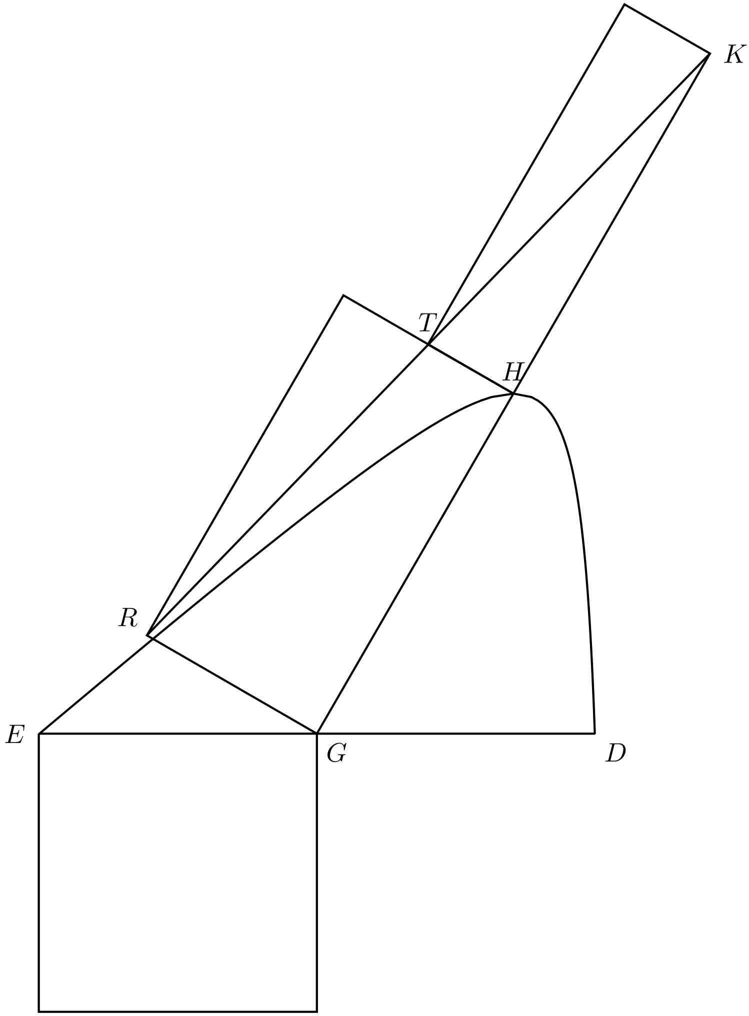
$HT$ doğrusuna, **dik kenar** (ὀρθία, latus rectum) denir. Aşağıdaki gibi bulunur:

$$\frac{HT}{HK} = \frac{RG}{GK} = \frac{RG \cdot GH}{GK \cdot GH} = \frac{BG \cdot GC}{GK \cdot GH} = \frac{BG}{GH} \cdot \frac{GC}{GK}.$$




O zaman $AV \parallel KH$ ise

$$\frac{HT}{HK} = \frac{HV}{VA} \cdot \frac{VU}{VA} = \frac{HV \cdot VU}{VA^2}.$$




$$GR : HT :: GK : HK,$$
$$EG^2 = GR \cdot GH.$$

# Kaynaklar

[1] Apollonius of Perga, *Apollonii Pergaei qvae Graece exstant cvm commentariis antiqvis*, vol. I, Teubner, 1974, Edidit et Latine interpretatvs est I. L. Heiberg.

[2] ———, *Conics. Books I–III*, revised ed., Green Lion Press, Santa Fe, NM, 1998, Translated and with a note and an appendix by R. Catesby Taliaferro, With a preface by Dana Densmore and William H. Donahue, an introduction by Harvey Flaumenhaft, and diagrams by Donahue, Edited by Densmore. MR MR1660991 (2000d:01005)

[3] Güler Çelgin, *Eski Yunanca–Türkçe sözlük*, Kabalcı, İstanbul, 2011.

[4] Euclid, *Euclidis Elementa*, Euclidis Opera Omnia, vol. I, Teubner, 1883, Edidit et Latine interpretatvs est I. L. Heiberg.

[5] ———, *The thirteen books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg. Vol. I: Introduction and Books I, II. Vol. II: Books III–IX. Vol. III: Books X–XIII and Appendix*, Dover Publications Inc., New York, 1956, Translated with introduction and commentary by Thomas L. Heath, 2nd ed. MR 17,814b

[6] ———, *The bones*, Green Lion Press, Santa Fe, NM, 2002, A handy where-to-find-it pocket reference companion to Euclid's *Elements*.

[7] ———, *Euclid's Elements*, Green Lion Press, Santa Fe, NM, 2002, All thirteen books complete in one volume, the Thomas L. Heath translation, edited by Dana Densmore. MR MR1932864 (2003j:01044)