Sayılar Kuramına Giriş

MAT 111, Sınav I *çözümleri*

David Pierce

24 Ekim 2017

Matematik Bölümü, MSGSÜ

Bu sınavda her sayı tamsayıdır. Çözüm yöntemlerinizi düşünerek seçin, ve çözümlerinizi net bir şekilde yazın. Mümkünse cevaplarınızı kontrol edin.
Her sınavdaki gibi, başka kimseyle konuşmayın; başka kimsenin kağıdını görmeye çalışmayın; kendi kağıdınızı başka kimseye göstermeyin, getirdiğiniz notları, kitapları, veya cihazları kullanmayın.
İyi çalışmalar dilerim.

Problem 1. Tanıma göre $a \mid b$ ancak ve ancak $ax = b$ denklemi çözülebilir. Aşağıdaki gerektirmelerin her birini ya kanıtlayın ya da karşıt örnek ile çürütün.

(a) $ab \mid c$ ise $a \mid c$ ve $b \mid c$. (b) $a \mid bc$ ise $a \mid b$ veya $a \mid c$.

Çözüm. (a) $ab \mid c$ olsun. O zaman bir x için $abx = c$. Özellikle $c = a(bx) = b(ax)$, dolayısıyla $a \mid c$ ve $b \mid c$.

(b) $4 \mid 2 \cdot 2$ ama $4 \nmid 2$.

Problem 2. Özyineli tanıma göre $t_1 = 1$ ve her n sayma sayısı için

$$t_{n+1} = t_n + n + 1.$$

Kanıtladığımız teoreme göre

$$t_n = \tfrac{1}{2}n \cdot (n+1).$$

Eğer $t_0 = 0$ tanımlanırsa aynı eşitlikler $n = 0$ durumunda da doğrudur. Şimdi

$$p_1 = 1, \qquad\qquad p_{n+1} = p_n + 3n + 1$$

olsun. Her n sayma sayısı için aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayın.

(a) $p_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$. (b) $p_n = n^2 + t_{n-1}$.

Çözüm. (a) $n = 1$ ise $\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 = p_1 = p_n$. İddia $n = m$ durumunda doğru ise

$$\begin{aligned}
p_{m+1} &= p_m + 3m + 1 && \text{[tanım]}\\
&= \tfrac{3}{2}m^2 - \tfrac{1}{2}m + 3m + 1 && \text{[hipotez]}\\
&= \tfrac{3}{2}(m^2 + 2m + 1) - \tfrac{1}{2}(m+1)\\
&= \tfrac{3}{2}(m+1)^2 - \tfrac{1}{2}(m+1).
\end{aligned}$$

Tümevarım ile istediğimiz sonuç çıkar.

(b)
$$\begin{aligned}
n^2 + t_{n-1} &= n^2 + \tfrac{1}{2}(n-1)n && \text{[teorem]}\\
&= n^2 + \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n && \text{[hesaplama]}\\
&= \tfrac{3}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n && \text{[hesaplama]}\\
&= p_n. && \text{[(a) parçası]}
\end{aligned}$$

Problem 3. Tamsayılarda

$$\text{ebob}(a, b) = \text{ebob}(b, a), \qquad \text{ebob}(a, b) = \text{ebob}(a \pm kb, b)$$

eşitliklerini biliyoruz. Aşağıdaki eşitliklerin her birini ya kanıtlayın ya da karşıt örnek ile çürütün.

(a) $\text{ebob}(a, bc) = b \cdot \text{ebob}(a, c)$.

(b) $\text{ebob}(2a + b, a + b) = \text{ebob}(a, b)$.

Çözüm. (a) $\text{ebob}(1, 2 \cdot 1) = 1$ ama $2 \cdot \text{ebob}(1, 1) = 2$.

(b) $2a + b - (a + b) = a$ olduğundan

$$\text{ebob}(2a + b, a + b) = \text{ebob}(a, a + b) = \text{ebob}(a, b).$$

Problem 4. Aşağıdakileri bulun.

(a) $\mathrm{ebob}(942, 180)$.

(b) $\mathrm{ebob}(942, 180) = 942x + 180y$ denkleminin bir çözümü.

(c) $\dfrac{942}{180} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}$ eşitliğini sağlayan a, b, c, ve d.

Çözüm. (a) $\left.\begin{cases} 942 = 180 \cdot 5 + 42, \\ 180 = 42 \cdot 4 + 12, \\ 42 = 12 \cdot 3 + 6, \\ 12 = 6 \cdot 2, \end{cases}\right\}$ dolayısıyla $\boxed{\mathrm{ebob}(942, 180) = 6.}$

(b) $\left.\begin{cases} 6 = 42 - 12 \cdot 3 \\ \quad = 42 - (180 - 42 \cdot 4) \cdot 3 \\ \quad = 42 \cdot 13 - 180 \cdot 3 \\ \quad = (942 - 180 \cdot 5) \cdot 13 - 180 \cdot 3 \\ \quad = 942 \cdot 13 - 180 \cdot 68 \end{cases}\right\}$ ve böylece (x, y), $\boxed{(13, -68)}$ olabilir. Kontrol:

$$\begin{array}{r} 942 \\ \times \quad 13 \\ \hline 2826 \\ 942 \\ \hline 12246 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 180 \\ \times \quad 68 \\ \hline 1440 \\ 1080 \\ \hline 12240 \end{array}$$

(c) $\dfrac{942}{180} = 5 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2}}}$