Sayılar Kuramına Giriş

MAT 111, Sınav II *çözümleri*

David Pierce

12 Aralık 2017

Matematik Bölümü, MSGSÜ

Çözüm yöntemlerinizi düşünerek seçin ve çözümlerinizi net bir şekilde yazın. Mümkünse $\boxed{\text{cevaplarınızı kontrol edin.}}$ Yazdığınız $\boxed{\text{her cümlenin, okura açık olan nedeni olmalı.}}$

Her sınavdaki gibi, başka kimseyle konuşmayın; başka kimsenin kağıdını görmeye çalışmayın; kendi kağıdınızı başka kimseye göstermeyin; getirdiğiniz notları, kitapları veya cihazları kullanmayın.

İyi çalışmalar dilerim.

Problem 1. *Aşağıdaki denklik, bir $\sim$ bağıntısının tanımı olsun:*

$$a \sim b \iff a + b \text{ çifttir.}$$

Bu $\sim$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterin.

Çözüm. Verilen bağıntının (i) yansımalı, (ii) simetrik ve (iii) geçişli olduğunu göstereceğiz.

(i) $a + a = 2a$ ve $2a$ çifttir, dolayısıyla $a \sim a$.

(ii) $b + a = a + b$ dolayısıyla $a + b$ çift ise $b + a$ da çifttir. Böylece $a \sim b$ ise $b \sim a$.

(iii) $a + b$ ve $b + c$ çift ise $a + c$ da çifttir çünkü

$$a + c = (a + b) + (b + c) - 2b.$$

Sonuç olarak $a \sim b$ ve $b \sim c$ ise $a \sim c$.

Not. Başka çözümler de mümkündür. Örneğin tanıma göre

$$\begin{aligned} a \sim b &\iff 2 \mid a + b \\ &\iff a \equiv -b \pmod 2 \\ &\iff a \equiv b \pmod 2 \end{aligned}$$

çünkü 2'ye göre $-1 \equiv 1$. Derste gösterdiğimiz gibi, sabit bir modüle göre kalandaşlık, bir denklik bağıntısıdır.

Problem 2.

(a) $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$ gösterin.

(b) Her n sayma sayısı için $\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1$ gösterin.

Çözüm. (a) Varsayıma göre bazı x ve y için

$$ax = b, \qquad\qquad by = c.$$

Sonuç olarak $c = (ax)y = a(xy)$, dolayısıyla $a \mid c$.

(b) Tümevarım kullanacağız. İki adım vardır.

(i) $n = 1$ ise iddia doğrudur, çünkü

$$\sum_{k=1}^{1} k! \cdot k = 1! \cdot 1 = 1$$

ve aynı zamanda $(1 + 1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$.

(ii) Şimdi $n = m$ durumunda iddia doğru varsayılırsa, o zaman

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} k! \cdot k &= \sum_{k=1}^{m} k! \cdot k + (m+1)! \cdot (m+1) && \text{[tanım]} \\
&= (m+1)! - 1 + (m+1)! \cdot (m+1) && \text{[hipotez]} \\
&= (m+1)! \cdot (m+2) - 1 && \text{[hesap]} \\
&= (m+2)! - 1 && \text{[tanım]},
\end{aligned}$$

dolayısıyla iddia $n = m + 1$ durumunda doğrudur.

Tümevarımdan iddia her durumda doğrudur.

Not. Birinci kanıtta $a \mid b$ ifadesinin anlamı, *bazı* x için $ax = b$. İkinci kanıtta eşitlikler *sırasıyla* anlaşılabilmeli.

Problem 3. 997 *asaldır.*

(a) $\mathbb{Z}_{997}$*'de* 100*'ün tersini bulun, yani*

$$100x \equiv 1 \pmod{997}$$

kalandaşlığını çözün.

(b) $\mathbb{Z}_{997}$*'de* 100^{995} *kuvvetini hesaplayın, yani*

$$100^{995} \equiv x \pmod{997} \ \ \& \ \ 0 < x < 997$$

sistemini çözün.

Çözüm. (a) Öklid Algoritmasını kullanacağız.

$$\begin{aligned}
997 &= 100 \cdot 9 + 97, \\
100 &= 97 \cdot 1 + 3, \\
97 &= 3 \cdot 32 + 1,
\end{aligned}$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned}1 &= 97 - 3\cdot 32 = 97 - (100-97)\cdot 32\\ &= 97\cdot 33 - 100\cdot 32 = (997 - 100\cdot 9)\cdot 33 - 100\cdot 32\\ &= 997\cdot 33 - 100\cdot 329.\end{aligned}$$

Kontrol edelim: $997 \cdot 33 = (1000-3)\cdot 33$

$$= 33000 - 99 = 32901 = 1 + 329\cdot 100.$$

Böylece $1 \equiv 100\cdot(-329) \equiv 100\cdot 668 \pmod{997}$, yani

$$100^{-1} \equiv 668 \pmod{997}.$$

(b) Fermat Teoreminden

$$1 \equiv 100^{996} \equiv 100^{995}\cdot 100 \pmod{997}$$

dolayısıyla (a) şıkkından $100^{995} \equiv 668 \pmod{997}$.

Problem 4. *Ya aşağıdaki önermeyi kanıtlayın, ya da karşıt bir örnek ile önermenin yanlış olduğunu kanıtlayın.*

> *Bir p tek asal sayısı için $\frac{1}{2}(p-1) = n$ olsun. Her a tamsayısı için, eğer p'ye göre $a^n \equiv -1$ ise, o zaman a, p'nin ilkel bir köküdür.*

Çözüm. 7 tek ve asaldır, $\frac{1}{2}(7-1) = 3$ ve

$$6^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1 \pmod{7}.$$

Aynı zamanda $6^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{7}$, ve $2 < 7-1$, dolayısıyla 6, 7'nin ilkel bir kökü değildir. Böylece önerme yanlıştır.