Sayılar Kuramına Giriş

MAT 111, Sınav II *çözümleri*

David Pierce

12 Aralık 2017

Matematik Bölümü, MSGSÜ

Çözüm yöntemlerinizi düşünerek seçin ve çözümlerinizi net bir şekilde yazın. Mümkünse cevaplarınızı kontrol edin. Yazdığınız her cümlenin, okura açık olan nedeni olmalı.

Her sınavdaki gibi, başka kimseyle konuşmayın; başka kimsenin kağıdını görmeye çalışmayın; kendi kağıdınızı başka kimseye göstermeyin; getirdiğiniz notları, kitapları veya cihazları kullanmayın.

İyi çalışmalar dilerim.

Problem 1. *Aşağıdaki denklik, bir $\sim$ bağıntısının tanımı olsun:*

$$a \sim b \iff a + b \text{ çifttir.}$$

Bu $\sim$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterin.

Çözüm. Verilen bağıntının (i) yansımalı, (ii) simetrik ve (iii) geçişli olduğunu göstereceğiz.

(i) $a + a = 2a$ ve $2a$ çifttir, dolayısıyla $a \sim a$.

(ii) $b + a = a + b$ dolayısıyla $a + b$ çift ise $b + a$ da çifttir. Böylece $a \sim b$ ise $b \sim a$.

(iii) $a + b$ ve $b + c$ çift ise $a + c$ da çifttir çünkü

$$a + c = (a + b) + (b + c) - 2b.$$

Sonuç olarak $a \sim b$ ve $b \sim c$ ise $a \sim c$.

Not. Başka çözümler de mümkündür. Örneğin tanıma göre

$$\begin{aligned} a \sim b &\iff 2 \mid a + b \\ &\iff a \equiv -b \pmod 2 \\ &\iff a \equiv b \pmod 2 \end{aligned}$$

çünkü 2'ye göre $-1 \equiv 1$. Derste gösterdiğimiz gibi, sabit bir modüle göre kalandaşlık, bir denklik bağıntısıdır.

Problem 2.

(a) $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$ gösterin.

(b) Her n sayma sayısı için $\sum_{k=1}^{n} k! \cdot k = (n+1)! - 1$ gösterin.

Çözüm. (a) Varsayıma göre bazı x ve y için

$$ax = b, \qquad by = c.$$

Sonuç olarak $c = (ax)y = a(xy)$, dolayısıyla $a \mid c$.

(b) Tümevarım kullanacağız. İki adım vardır.

(i) $n = 1$ ise iddia doğrudur, çünkü

$$\sum_{k=1}^{1} k! \cdot k = 1! \cdot 1 = 1$$

ve aynı zamanda $(1 + 1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$.

(ii) Şimdi $n = m$ durumunda iddia doğru varsayılırsa, o zaman

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} k! \cdot k &= \sum_{k=1}^{m} k! \cdot k + (m+1)! \cdot (m+1) && \text{[tanım]} \\
&= (m+1)! - 1 + (m+1)! \cdot (m+1) && \text{[hipotez]} \\
&= (m+1)! \cdot (m+2) - 1 && \text{[hesap]} \\
&= (m+2)! - 1 && \text{[tanım]},
\end{aligned}$$

dolayısıyla iddia $n = m + 1$ durumunda doğrudur.

Tümevarımdan iddia her durumda doğrudur.

Not. Birinci kanıtta $a \mid b$ ifadesinin anlamı, *bazı* x için $ax = b$. İkinci kanıtta eşitlikler *sırasıyla* anlaşılabilmeli.

Problem 3. 997 *asaldır.*

(a) $\mathbb{Z}_{997}$*'de* 100*'ün tersini bulun, yani*

$$100x \equiv 1 \pmod{997}$$

kalandaşlığını çözün.

(b) $\mathbb{Z}_{997}$*'de* 100^{995} *kuvvetini hesaplayın, yani*

$$100^{995} \equiv x \pmod{997} \ \ \& \ \ 0 < x < 997$$

sistemini çözün.

Çözüm. (a) Öklid Algoritmasını kullanacağız.

$$\begin{aligned}
997 &= 100 \cdot 9 + 97, \\
100 &= 97 \cdot 1 + 3, \\
97 &= 3 \cdot 32 + 1,
\end{aligned}$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned}1 &= 97 - 3 \cdot 32 = 97 - (100 - 97) \cdot 32 \\ &= 97 \cdot 33 - 100 \cdot 32 = (997 - 100 \cdot 9) \cdot 33 - 100 \cdot 32 \\ &= 997 \cdot 33 - 100 \cdot 329.\end{aligned}$$

Kontrol edelim: $997 \cdot 33 = (1000 - 3) \cdot 33$

$$= 33000 - 99 = 32901 = 1 + 329 \cdot 100.$$

Böylece $1 \equiv 100 \cdot (-329) \equiv 100 \cdot 668 \pmod{997}$, yani

$$100^{-1} \equiv 668 \pmod{997}.$$

(b) Fermat Teoreminden

$$1 \equiv 100^{996} \equiv 100^{995} \cdot 100 \pmod{997}$$

dolayısıyla (a) şıkkından $100^{995} \equiv 668 \pmod{997}$.

Problem 4. *Ya aşağıdaki önermeyi kanıtlayın, ya da karşıt bir örnek ile önermenin yanlış olduğunu kanıtlayın.*

> *Bir p tek asal sayısı için $\frac{1}{2}(p-1) = n$ olsun. Her a tamsayısı için, eğer p'ye göre $a^n \equiv -1$ ise, o zaman a, p'nin ilkel bir köküdür.*

Çözüm. 7 tek ve asaldır, $\frac{1}{2}(7-1) = 3$ ve

$$6^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1 \pmod{7}.$$

Aynı zamanda $6^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{7}$, ve $2 < 7 - 1$, dolayısıyla 6, 7'nin ilkel bir kökü değildir. Böylece önerme yanlıştır.