Sayılar Kuramına Giriş

MAT 111, Final Sınavı *çözümleri*

David Pierce

2 Ocak 2018

Matematik Bölümü, MSGSÜ

Çözüm yöntemlerinizi düşünerek seçin ve çözümlerinizi net bir şekilde yazın. Mümkünse cevaplarınızı kontrol edin. Yazdığınız her cümlenin, okura açık olan nedeni olmalı.

Her sınavdaki gibi, başka kimseyle konuşmayın; başka kimsenin kağıdını görmeye çalışmayın; kendi kağıdınızı başka kimseye göstermeyin; getirdiğiniz notları, kitapları veya cihazları kullanmayın.

İyi çalışmalar dilerim.

Problem 1. *Özyineli tanıma göre*

$$\begin{aligned} F_1&=1, & F_2&=1, & F_{n+2}&=F_{n+1}+F_n,\\ L_1&=1, & L_2&=3, & L_{n+2}&=L_{n+1}+L_n \end{aligned}$$

olsun. Her n sayma sayısı için

$$L_{n+2}\cdot F_n-L_{n+1}\cdot F_{n+1}=(-1)^{n+1}$$

eşitliğini gösterin.

Çözüm. (i) $L_3\cdot F_1-L_2\cdot F_2=4-3=1=(-1)^2$ olduğundan iddia $n=1$ durumunda doğrudur.

(ii) Bir m için iddia $n=m$ durumunda doğru ise

$$\begin{aligned} &L_{m+3}\cdot F_{m+1}-L_{m+2}\cdot F_{m+2}\\ &=(L_{m+2}+L_{m+1})\cdot F_{m+1}-L_{m+2}\cdot(F_{m+1}+F_m)\\ &=L_{m+1}\cdot F_{m+1}-L_{m+2}\cdot F_m\\ &=-(-1)^{m+1}\\ &=(-1)^{m+2}, \end{aligned}$$

dolayısıyla iddia $n=m+1$ durumunda doğrudur.

Tümevarımdan her n sayma sayısı için iddia doğrudur.

Problem 2. *Aşağıdaki kalandaşlık sisteminin en küçük pozitif çözümünü hesaplayın.*

$$x\equiv 20 \pmod{47},\qquad x\equiv 24\pmod{115}.$$

Not*:* $47\cdot 115=5405$.

Çözüm. Öklid Algoritması ile

$$\begin{aligned} 115&=47\cdot 2+21,\\ 47&=21\cdot 2+5\\ 21&=5\cdot 4+1, \end{aligned}$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned} 1&=21-5\cdot 4=21-(47-21\cdot 2)\cdot 4\\ &=21\cdot 9-47\cdot 4=(115-47\cdot 2)\cdot 9-47\cdot 4\\ &=115\cdot 9-47\cdot 22. \end{aligned}$$

Kontrol ederiz:

$$\begin{aligned}115 \cdot 9 &= 1150 - 115 = 1035,\\ 47 \cdot 22 &= 940 + 94 = 1034.\end{aligned}$$

Çin Kalan Teoremi'nden sistemin çözümü, 5405'e göre

$$\begin{aligned}x &\equiv 20 \cdot 115 \cdot 9 - 24 \cdot 47 \cdot 22\\ &\equiv 20 - 4 \cdot 47 \cdot 22\\ &\equiv 20 - 4 \cdot 1034\\ &\equiv 20 - 4136\\ &\equiv -4116\\ &\equiv 5405 - 4116\\ &\equiv 1289.\end{aligned}$$

Kontrol ederiz:

$$\begin{aligned}47 \cdot 20 &= 940, & &\\ 1289 - 940 &= 349, & 115 \cdot 11 &= 1150 + 115 = 1265,\\ 47 \cdot 7 &= 350 - 21 = 329, & 1289 - 1265 &= 24,\\ 349 - 329 &= 20, & 1289 &\equiv 24 \pmod{115}.\\ 1289 &\equiv 20 \pmod{47}, & &\end{aligned}$$

Problem 3. $p = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65537$ *olsun; p'nin asal olduğunu biliyoruz. Ayrıca*

$$3^{2^{15}} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Aşağıdaki önermeleri kanıtlayın.

(a) 2, p'nin ilkel bir kökü değildir.

(b) 3, p'nin ilkel bir köküdür.

Çözüm.

(a) p'ye göre $2^{2^4} \equiv -1$ olduğundan
$$2^{2^5} \equiv (2^{2^4})^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1,$$
ama $2^5 < 2^{16} = p - 1$, dolayısıyla 2'nin mertebesi, $p - 1$'den kesin küçüktür.

(b) p'ye göre 3'ün mertebesi d olsun. O zaman $d \mid 2^{16}$, dolayısıyla bir t için $d = 2^t$ ve $0 \leqslant t \leqslant 16$. Eğer $t < 16$ ise, o zaman $t \leqslant 15$, dolayısıyla
$$-1 \equiv 3^{2^{15}} \equiv (3^{2^t})^{2^{15-t}} \equiv 1^{2^{15-t}} \equiv 1,$$
ki bu imkânsızdır. Sonuç olarak $t = 16$ ve $d = p - 1$, dolayısıyla 3, p'nin ilkel bir köküdür.

Problem 4. *Aşağıdaki gerektirmelerin her birini ya kanıtlayın ya da karşıt örnek ile çürütün. (Küçük harfler tamsayıdır.)*

(a) $b \nmid a$ *ise* $a \mid b$.

(b) $\operatorname{ebob}(a, b) = \operatorname{ebob}(a, c)$ *ise* $\operatorname{ebob}(a, b) = \operatorname{ebob}(a, b + c)$.

(c) $\operatorname{ebob}(a, b) = 1$ & $\operatorname{ebob}(a, c) = 1$ *ise* $\operatorname{ebob}(a, bc) = 1$.

Çözüm.

(a) $2 \nmid 3$ & $3 \nmid 2$.

(b) $\operatorname{ebob}(2, 1) = 1$ ama $\operatorname{ebob}(2, 1 + 1) = 2$.

(c) $\operatorname{ebob}(a, bc) \neq 1$ olsun. O zaman a ve bc'nin p *asal* ortak böleni vardır. Öklid Lemması ile $p \mid b$ veya $p \mid c$. Bu durumda $p \mid a$ da olduğundan $\operatorname{ebob}(a, b)$ ve $\operatorname{ebob}(a, c)$'den biri 1 olmaz.