Sayılar Kuramına Giriş

Alıştırmalar (taslak)

David Pierce

3 Ekim 2017

Matematik Bölümü, MSGSÜ
dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

Özyineleme ve Tümevarım

Tanım (üçgen sayılar)**.** $t_1 = 1$, ve bir n için t_n tanımlanmış olursa

$$t_{n+1} = t_n + n + 1.$$

Kısaca her n sayma sayısı için $t_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \cdots + n$.

Teorem. *Her n sayma sayısı için*

$$t_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1). \tag{$*$}$$

Kanıt 1.

- $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1 = t_1$.
- Iddia $n = m$ durumunda doğruysa

$$\begin{aligned}
t_{m+1} &= t_m + m + 1 && \text{[tanım]}\\
&= \frac{1}{2} \cdot m \cdot (m+1) + m + 1 && \text{[hipotez]}\\
&= \left(\frac{1}{2} \cdot m + 1\right) \cdot (m+1)\\
&= \frac{1}{2}(m+2)(m+1)\\
&= \frac{1}{2}(m+1)(m+2),
\end{aligned}$$

  ve böylece iddia $n = m + 1$ durumunda doğrudur.

Tümevarımdan her n sayma sayısı için $(*)$ doğrudur. □

Kanıt 2. $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{n}\big((k+1)^2 - k^2\big) = \sum_{k=1}^{n}(2k+1).$$

Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{n}\big((k+1)^2 - k^2\big) = (n+1)^2 - 1^2 = n^2 + 2n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k + n,$$

dolayısıyla

$$n^2 + 2n = 2\sum_{k=1}^{n} k + n,$$

$$2\sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n. \qquad \square$$

Alıştırma 1. Aşağıdaki eşitlikleri her n sayma sayısı için kanıtlayın.

a) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

b) $t_n + t_{n+1} = (n+1)^2$.

c) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

Alıştırma 2. Öyle a, b, ve c bulun ki her n sayma sayısı için

$$\sum_{k=1}^{n} t_k = an^3 + bn^2 + cn.$$

Alıştırma 3. Öyle a, b, ve c bulun ki her n sayma sayısı için

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = an^4 + bn^3 + cn^2.$$

Alıştırma 4. Her n sayma sayısı için

$$n^3 = \sum_{k=t_{n-1}+1}^{t_n} (2k-1)$$

kanıtlayın. (Burada $t_0 = 0$.)

2

Hesaplama kuralları

Yukarıda okulda öğretilmiş hesaplama kurallarını varsaydık, ama bu kuralları kanıtlayabiliriz. Toplamanın birleşmeli ve değişmeli olması, geometriden gelir.

Tanım (çoğaltma)**.** Her a gerçel sayısı için $a \cdot 1 = a$, ve bir n için $a \cdot n$ tanımlanırsa

$$a \cdot (n + 1) = a \cdot n + a.$$

Böylece sayma sayılarında çarpma işlemi tanımlanır.

Alıştırma 5. Aşağıdaki eşitlikleri, her n sayma sayısı için kanıtlayın. Burada a ve b, gerçel sayıdir ve m, sayma sayısıdır.

a) $1 \cdot n = n$.

b) $(a + b) \cdot n = a \cdot n + b \cdot n$.

c) $m \cdot n = n \cdot m$.

d) $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$.

e) $a \cdot (m \cdot n) = (a \cdot m) \cdot n$.

Tanım (kuvvetler)**.** Her a gerçel sayısı için $a^1 = a$, ve bir n için a^n tanımlanırsa

$$a^{n+1} = a^n \cdot a.$$

Alıştırma 6. Aşağıdaki eşitlikleri, her n sayma sayısı için kanıtlayın. Burada a, gerçel sayıdir ve m, sayma sayısıdır.

a) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

b) $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$.

Alıştırma 7. Bazı a ve b gerçel sayıları için $a < b$ olsun. Geometriden her c için $a + c < b + c$. Her n sayma sayısı için

$$a \cdot n < b \cdot n$$

kanıtlayın.

İyisıralama

Alıştırma 8. Sayma sayılarında $x^2 = 3y^2$ denkleminin hiç çözümü olmadığını kanıtlayın.

Teorem. 1*'den büyük her sayma sayısı,* p_k *çarpanları asal olmak üzere*

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$$

çarpımı olarak yazılabilir.

Alıştırma 9. Teoremi kanıtlayın.

3

Bölme

Bu bölümde her sayı bir sayma sayısıdır.

Tanım. $ax = b$ denklemi çözülebilirse $a \mid b$ yazılır.

Alıştırma 10. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayın.

a) $1 \mid a$.

b) $a \mid a$.

c) $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise $a \mid c$.

Alıştırma 11. $a \mid b$ ise $a \leqslant b$ kanıtlayın.

Alıştırma 12. $a \mid b$ ve $b \mid a$ ise $a = b$ kanıtlayın.

Alıştırma 13. Buradaki her önerme için, önerme her zaman doğru ise kanıtlayın, değilse karşıt örnek verin.

1. $3 \mid a^2$ ve $3 \mid a^2 + 1$.
2. $3 \mid a^2$ veya $3 \mid a^2 + 1$.
3. $ab \mid c$ ise $a \mid c$ ve $b \mid c$.
4. $ab \mid c$ ise $a \mid c$ veya $b \mid c$.
5. $a \mid b$ ise $a \nmid b + 1$.
6. $a + 1 \mid b$ ise $a \nmid b$.
7. $a \mid bc$ ise $a \mid b$.
8. $a \mid bc$ ise $a \mid b$ veya $a \mid c$.
9. $a \mid b$ ve $c \mid d$ ise $ac \mid bd$.
10. $ac \mid bd$ ise $a \mid b$ ve $c \mid d$.

4