Sayılar Kuramına Giriş

Alıştırmalar V

David Pierce

21 Aralık 2017

dpierce@msgsu.edu.tr

http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

Alıştırma 1. Hem tümevarım ile hem kalandaşlık ile her n sayma sayısı için aşağıdaki bölebilmeleri kanıtlayın.

(a) $5 \mid 2^{4n} + 4$,
(b) $7 \mid 3^{4n+1} + 4^{n+1}$.

Alıştırma 2. Öklid Algoritmasıyla, eğer

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_2 \cdot b_1 + a_3,\\
a_2 &= a_3 \cdot b_2 + a_4,\\
a_3 &= a_4 \cdot b_3 + a_5,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
a_{n-1} &= a_n \cdot b_n + a_{n+1},\\
a_n &= a_{n+1} \cdot b_{n+1},
\end{aligned}$$

$a_n \neq 0$, ve $|a_{n+1}| = d$ ise, o zaman

$$d = \operatorname{ebob}(a_1, a_2). \tag{$*$}$$

Her durumda

$$\frac{a_1}{a_2} = b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}. \tag{$\dagger$}$$

Seçtiğiniz $(b_1, \dots, b_{n+1})$ listesi ve pozitif d sayısı için öyle a_1 be a_2 bulun ki $(*)$ ve $(\dagger)$ eşitlikleri doğru olsun. Örneğin $(3, 1, 4, 1)$ ve 5 ile 115 ve 30 çıkar.

Alıştırma 3. F_n, n'inci **Fibonacci sayısı** olsun. Özyineli tanıma göre

$$F_1 = 1, \qquad F_2 = 1, \qquad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

Aşağıdaki eşitliği kanıtlayarak her iki ardışık Fibonacci sayısının birbirine asal olduğunu gösterin.

$$F_{n+3}F_n - F_{n+2}F_{n+1} = (-1)^{n+1}.$$

Alıştırma 4.

(a) Seçtiğiniz birbirine asal olan k ve m için, herhangi a ve b için

$$x \equiv a \pmod{k}, \qquad x \equiv b \pmod{m}$$

sistemini çözün. Örneğin $(k, m, a, b) = (17, 101, 3, 10)$ ise $x \equiv 717 \pmod{1717}$.

(b) Benzer şekilde n hem k'ye hem m'ye asal ise

$$x \equiv a \pmod{k}, \quad x \equiv b \pmod{m}, \quad x \equiv c \pmod{n}$$

sistemini çözün. Örneğin $(n, c) = (8, 4)$ ise $x \equiv 5868 \pmod{13\,736}$.

Alıştırma 5. Verilen k ve m için bir modülü bulun ki ona göre kalandaşlık, hem k'ye hem de m'ye göre kalandaşlığa denk olsun.