

Sayılar Kuramına Giriş

Alıştırmalar IV

David Pierce

24 Ekim 2017

Matematik Bölümü, MSGSÜ

dpierce@msgsu.edu.tr

<http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/>

Tanıma göre $n \in \mathbb{N}$, p asal, $p \nmid a$, ve $d \mid p-1$ olmak üzere

$$\mathbb{Z}_n^\times = \{x \in \mathbb{Z}_n : \text{ebob}(n, x) = 1\},$$

$$\varphi(n) = |\mathbb{Z}_n^\times|,$$

$$\text{ord}_p(a) = \min\{x \in \mathbb{N} : a^x \equiv 1\} \pmod{p},$$

$$\psi_p(d) = |\{x \in \mathbb{Z}_p^\times : \text{ord}_p(x) = d\}|$$

olsun. (Derste $\varphi(n)$, $\text{ord}_p(a)$, ve $\psi_p(d)$ tanımlandı ama \mathbb{Z}_n^\times kullanılmadı.)

Alıştırma 1. Her p_i asal olmak üzere $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ ise $\sum_{i=1}^n p_i^{-1}$ toplamının bir tamsayı olmadığını gösterin. (Alıştırmalar III kağıdındaki bir teoremi kullanabilirsiniz. İlk olarak $n = 2$ durumunu gösterebilirsiniz.)

Alıştırma 2. Hem n hem $n+5$ asal olabilir mi?

Alıştırma 3. (a) Eğer n tek ise $\varphi(n)$ değerinin çift olduğunu gösterin. (*İpucu:* Bazı tek n için \mathbb{Z}_n kümesi

1	2	3	...	n
---	---	---	-----	-----

 olarak yazın ve \mathbb{Z}_n^\times altkümesinin elemanlarını seçin.)

(b) Eğer n çift ise $\varphi(n)$ tek midir?

(c) \mathbb{Z}_n^\times kümesinin elemanlarının toplamının $(n \cdot \varphi(n))/2$ bölümüne eşit olduğunu kanıtlayın.

Alıştırma 4. (a) 53 modülüne göre aşağıdaki gibi bir tabloyu çizip doldurun. (Burada $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ eşitliği faydalı olabilir.)

x	x^2	x^2
1	1	
2	4	
4	16	
5	25	
6	36	-17
7		-4
.....		
26	40	-13

(b) Tablonuzun sadece dört satırını kullanarak 26'nın 53'ün ilkel bir kökü olduğunu gösterin.

Alıştırma 5. Hangi p asal modüllerine göre $a \equiv b$ kaldıraçlılığından $c^a \equiv c^b$ çıkar?

Alıştırma 6. Hangi p asal sayıları için a 'nın p 'nin ilkel bir kökü olduğu zamanda $-a$ da p 'nin ilkel bir köküdür?

Alıştırma 7. $\psi_p(d) \leq \varphi(d)$ kanıtlayın. (Derste $p = 13$ durumuna baktık.)