Sayılar Kuramına Giriş

Alıştırmalar II

David Pierce

13 Ekim 2017

Matematik Bölümü, MSGSÜ
dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

Tamsayılar

Tanımımıza göre

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{\text{sayma sayıları}\} = \{1, 2, 3, \dots\},\\ \omega &= \{\text{doğal sayılar}\} = \{0\} \cup \mathbb{N},\\ \mathbb{Z} &= \{\text{tamsayılar}\} = \{-x \colon x \in \mathbb{N}\} \cup \omega.\end{aligned}$$

Burada ω harfi w ("çifte u") değil, omegadır.

Alıştırma 1. $\mathbb{Z}$'de

$$\begin{aligned}a + (b + c) &= (a + b) + c, & a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c,\\ a + b &= b + a, & a \cdot b &= b \cdot a,\\ a + 0 &= a, & a \cdot 1 &= a,\\ a + (-a) &= 0, & a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c.\end{aligned}$$

Bunları kullanarak

$$a \cdot 0 = 0$$

eşitliğini kanıtlayın.

Alıştırma 2. $\mathbb{Z}$'de

$$a + x = b$$

denkleminin *sayma sayısı* çözümü varsa,

$$a < b$$

ifadesini yazarız. Ayrıca

$$a \in \mathbb{N} \iff -a \notin \omega.$$

Tabii ki iki sayma sayısının toplamı ve çarpımı da sayma sayısıdır. Bunlardan

$$\begin{gathered}a < b \ \& \ b < c \implies a < c,\\ a < b \implies a + c < b + c,\\ a < b \ \& \ c \in \mathbb{N} \implies a \cdot c < b \cdot c\end{gathered}$$

gerektirmelerini kanıtlayın.

Öklid Algoritması, Bézout Lemması

Eğer
$$a_1 > a_2 > 0$$
koşulunu sağlayan a_1 ve a_2 tamsayıları verilirse, o zaman Öklid Algoritması ile, bir n sayma sayısı için, öyle sonlu bir $(a_k : 1 \leqslant k \leqslant n)$ dizisini buluruz ki
$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0,$$
ve $1 < k < n$ olmak üzere bir b_k için
$$a_{k-1} = a_k \cdot b_k + a_{k+1},$$
ama
$$a_n \mid a_{n-1}.$$
Bu durumda
$$a_n = \operatorname{ebob}(a_1, a_2).$$
Ayrıca
$$\operatorname{ebob}(a_1, a_2) = a_1 \cdot x + a_2 \cdot y \qquad (*)$$
denklemi $\mathbb{Z}$'de çözülebilir: bu sonuç, Bézout Lemmasıdır.

Alıştırma 3. (a_1, a_2) aşağıdaki sıralı ikilisi olmak üzere $(*)$ denkleminin herhangi *iki* çözümünü bulun. Sonuçlarınızı kontrol edin.

(a) $(610, 377)$

(b) $(5101, 5099)$

(c) $(1690, 455)$

Alıştırma 4. $\mathbb{Z}$'de, buradaki her önerme için, önerme her zaman doğru ise kanıtlayın, değilse karşıt örnek verin.

(a) $\operatorname{ebob}(a, b) = \operatorname{ebob}(a^2, b)$

(b) $\operatorname{ebob}(a, b) = \operatorname{ebob}(a, a + b)$

(c) $\operatorname{ebob}(ac, bc) = c \cdot \operatorname{ebob}(a, b)$

(d) $\operatorname{ebob}(a, b) = \operatorname{ebob}(2a + b, a + 3b)$

(e) $\operatorname{ebob}(a, b) = \operatorname{ebob}(2a + 3b, 5a + 8b)$

(f) $\operatorname{ebob}(a, c) = \operatorname{ebob}(b, c) = 1 \implies \operatorname{ebob}(a + b, c) = 1$

(g) $\operatorname{ebob}(a, c) = \operatorname{ebob}(b, c) = 1 \implies \operatorname{ebob}(ab, c) = 1$

(h) $\operatorname{ebob}(a, b) = 1 \;\&\; d \mid ac \;\&\; d \mid bc \implies d \mid c$

Alıştırma 5. Eğer $\operatorname{ebob}(a, b) = 1$ ise, aşağıdaki ifadelerin alabildiği değerler nedir?

(a) $\operatorname{ebob}(a + b, a^2 + b^2)$

(b) $\operatorname{ebob}(a + b, a^2 - b^2)$