# Sayılar Kuramı (MAT 316)

## İlk sınav

David Pierce

19 Nisan 2024

Matematik Böl., MSGSÜ

Lütfen dikkat edin. Öğrenci numaranız $N$ ise,

$$1 \leqslant M \leqslant 4 \ \ \& \ \ N \equiv M \pmod 4$$

olacak şekilde:

- Okuyacağım her kağıdın üstüne adınızı, soyadınızı, ve $M$'nin değerini yazın.
- Problem I'de

$$\begin{aligned} M = 1 &\implies (A, B, C) = (90, 721, 76), \\ M = 2 &\implies (A, B, C) = (72, 577, 68), \\ M = 3 &\implies (A, B, C) = (56, 449, 60), \\ M = 4 &\implies (A, B, C) = (42, 337, 52) \end{aligned}$$

  olsun.
- Problem II'de önerme $M$'yi kanıtlayın.
- Yazınızı ve hesaplarınızı kontrol edin; onları okuyup anlayabilmem gerekiyor.
- Sınavdan sonra bu kağıdı alabilirsiniz.

**Problem I.** Sayma sayılarında,

(i) $x^2 - Ay^2 = 1$ denklemi için sonsuz bir çözüm kümesini bulun;

(ii) $Bx - Cy = 1$ denkleminin en küçük çözümünü bulun.

**Problem II.** $\mathbb{N}$'de aşağıdaki önermeler doğrudur.

1. Her $n$ ve her $k$ için $(k + 1) \cdot n = k \cdot n + n$.
2. Çarpma değişmelidir.
3. Çarpma, toplama üzerinde dağılır.
4. Çarpma birleşmelidir.

Yukarıda yazıldığı gibi, 4 modülüsüne göre eğer öğrenci numaranız $M$'ye denk ise, önerme $M$'yi (ve sadece bu önermeyi) kanıtlayın. Kanıtınızda sadece aşağıdakileri kullanın.

- Toplama, birleşmeli ve değişmelidir.
- Çarpmanın özyineli tanımı,

$$n \cdot 1 = n, \qquad\qquad n \cdot (k + 1) = n \cdot k + n.$$

- Tümevarım mümkündür.

Ayrıca

- Önerme 2 için $1 \cdot n = n$ ve Önerme 1 kullanılabilir;
- Önerme 3 için Önerme 2 kullanılabilir;
- Önerme 4 için Önermeler 2 ve 3 kullanılabilir.

*Çözüm.* (i)

$$\begin{aligned}\sqrt{90} &= 9+\sqrt{90}-9,\\ \frac{1}{\sqrt{90}-9} &= \frac{\sqrt{90}+9}{9} = 2+\frac{\sqrt{90}-9}{9},\\ \frac{9}{\sqrt{90}-9} &= \sqrt{90}+9 = 18+\sqrt{90}-9,\end{aligned}$$

dolayısıyla $\sqrt{90}=[9,2,9+\sqrt{90}]$. Ayrıca

$$\begin{aligned}[9,2,9+x] &= \left[9,2+\frac{1}{9+x}\right] = \left[9,\frac{19+2x}{9+x}\right]\\ &= 9+\frac{9+x}{19+2x} = \frac{180+19x}{19+2x}.\end{aligned}$$

Şimdi

$$\begin{aligned}(a_1,b_1) &= (19,2),\\ (a_{m+1},b_{m+1}) &= (19a_m+180b_m, 2a_m+19b_m)\end{aligned}$$

olsun. Bunların her biri, $x^2-90y^2=1$ denklemini çözer, çünkü

$$a_1{}^2-90b_1{}^2 = 19^2-90\cdot 2^2 = 1,$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned}&(19a_m+180b_m)^2-90(2a_m+19b_m)2\\ &\qquad = (19^2-90\cdot 2^2)a_m^2\\ &\qquad + 2(19\cdot 180-90\cdot 2\cdot 19)a_mb_m\\ &\qquad + (90^2\cdot 2^2-90\cdot 19^2)b_m^2\\ &\qquad = a_m^2-90b_m^2.\end{aligned}$$

(ii)
$$\left.\begin{aligned}721 &= 76\cdot 9+37,\\ 76 &= 37\cdot 2+2,\\ 37 &= 2\cdot 18+1,\end{aligned}\right\}\text{ dolayısıyla }\left\{\begin{aligned}1 &= 37-2\cdot 18\\ &= 37-(76-37\cdot 2)\cdot 18\\ &= 37\cdot 37-76\cdot 18\\ &= (721-76\cdot 9)\cdot 37-76\cdot 18\\ &= 721\cdot 37-76\cdot 351.\end{aligned}\right.$$

*Çözüm.* (i)

$$\begin{aligned}\sqrt{72} &= 8+\sqrt{72}-8,\\ \frac{1}{\sqrt{72}-8} &= \frac{\sqrt{72}+8}{8} = 2+\frac{\sqrt{72}-8}{8},\\ \frac{8}{\sqrt{72}-8} &= \sqrt{72}+8 = 16+\sqrt{72}-8,\end{aligned}$$

dolayısıyla $\sqrt{72}=[8,2,8+\sqrt{72}]$. Ayrıca

$$\begin{aligned}[8,2,8+x] &= \left[8,2+\frac{1}{8+x}\right] = \left[8,\frac{17+2x}{8+x}\right]\\ &= 8+\frac{8+x}{17+2x} = \frac{144+17x}{17+2x}.\end{aligned}$$

Şimdi

$$\begin{aligned}(a_1,b_1) &= (17,2),\\ (a_{m+1},b_{m+1}) &= (17a_m+144b_m, 2a_m+17b_m)\end{aligned}$$

olsun. Bunların her biri, $x^2-72y^2=1$ denklemini çözer, çünkü

$$a_1{}^2-72b_1{}^2 = 17^2-72\cdot 2^2 = 1,$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned}&(17a_m+144b_m)^2-72(2a_m+17b_m)2\\ &\qquad = (17^2-72\cdot 2^2)a_m^2\\ &\qquad + 2(17\cdot 144-72\cdot 2\cdot 17)a_mb_m\\ &\qquad + (72^2\cdot 2^2-72\cdot 17^2)b_m^2\\ &\qquad = a_m^2-72b_m^2.\end{aligned}$$

(ii)
$$\left.\begin{aligned}577 &= 68\cdot 8+33,\\ 68 &= 33\cdot 2+2,\\ 33 &= 2\cdot 16+1,\end{aligned}\right\}\text{ dolayısıyla }\left\{\begin{aligned}1 &= 33-2\cdot 16\\ &= 33-(68-33\cdot 2)\cdot 16\\ &= 33\cdot 33-68\cdot 16\\ &= (577-68\cdot 8)\cdot 33-68\cdot 16\\ &= 577\cdot 33-68\cdot 280.\end{aligned}\right.$$

*Çözüm.* (i)

$$\begin{aligned}
\sqrt{56} &= 7 + \sqrt{56} - 7,\\
\frac{1}{\sqrt{56}-7} &= \frac{\sqrt{56}+7}{7} = 2 + \frac{\sqrt{56}-7}{7},\\
\frac{7}{\sqrt{56}-7} &= \sqrt{56}+7 = 14 + \sqrt{56}-7,
\end{aligned}$$

dolayısıyla $\sqrt{56} = [7, 2, 7 + \sqrt{56}]$. Ayrıca

$$\begin{aligned}
[7, 2, 7 + x] &= \left[7, 2 + \frac{1}{7+x}\right] = \left[7, \frac{15+2x}{7+x}\right]\\
&= 7 + \frac{7+x}{15+2x} = \frac{112+15x}{15+2x}.
\end{aligned}$$

Şimdi

$$\begin{aligned}
(a_1, b_1) &= (15, 2),\\
(a_{m+1}, b_{m+1}) &= \big(15a_m + 112b_m, 2a_m + 15b_m\big)
\end{aligned}$$

olsun. Bunların her biri, $x^2 - 56y^2 = 1$ denklemini çözer, çünkü

$${a_1}^2 - 56{b_1}^2 = 15^2 - 56 \cdot 2^2 = 1,$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned}
&(15a_m + 112b_m)^2 - 56(2a_m + 15b_m)2\\
&\qquad = (15^2 - 56 \cdot 2^2)a_m^2\\
&\qquad + 2(15 \cdot 112 - 56 \cdot 2 \cdot 15)a_m b_m\\
&\qquad + (56^2 \cdot 2^2 - 56 \cdot 15^2)b_m^2\\
&\qquad = a_m^2 - 56b_m^2.
\end{aligned}$$

(ii) $$\left.\begin{aligned}
449 &= 60 \cdot 7 \ + 29,\\
60 &= 29 \cdot 2 \ + 2,\\
29 &= \ 2 \ \cdot 14 + 1,
\end{aligned}\right\} \text{dolayısıyla} \left\{\begin{aligned}
1 &= 29 - 2 \cdot 14\\
&= 29 - (60 - 29 \cdot 2) \cdot 14\\
&= 29 \cdot 29 - 60 \cdot 14\\
&= (449 - 60 \cdot 7) \cdot 29 - 60 \cdot 14\\
&= 449 \cdot 29 - 60 \cdot 217.
\end{aligned}\right.$$

*Çözüm.* (i)

$$\begin{aligned}
\sqrt{42} &= 6 + \sqrt{42} - 6,\\
\frac{1}{\sqrt{42}-6} &= \frac{\sqrt{42}+6}{6} = 2 + \frac{\sqrt{42}-6}{6},\\
\frac{6}{\sqrt{42}-6} &= \sqrt{42}+6 = 12 + \sqrt{42}-6,
\end{aligned}$$

dolayısıyla $\sqrt{42} = [6, 2, 6 + \sqrt{42}]$. Ayrıca

$$\begin{aligned}
[6, 2, 6 + x] &= \left[6, 2 + \frac{1}{6+x}\right] = \left[6, \frac{13+2x}{6+x}\right]\\
&= 6 + \frac{6+x}{13+2x} = \frac{84+13x}{13+2x}.
\end{aligned}$$

Şimdi

$$\begin{aligned}
(a_1, b_1) &= (13, 2),\\
(a_{m+1}, b_{m+1}) &= \big(13a_m + 84b_m, 2a_m + 13b_m\big)
\end{aligned}$$

olsun. Bunların her biri, $x^2 - 42y^2 = 1$ denklemini çözer, çünkü

$${a_1}^2 - 42{b_1}^2 = 13^2 - 42 \cdot 2^2 = 1,$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned}
&(13a_m + 84b_m)^2 - 42(2a_m + 13b_m)2\\
&\qquad = (13^2 - 42 \cdot 2^2)a_m^2\\
&\qquad + 2(13 \cdot 84 - 42 \cdot 2 \cdot 13)a_m b_m\\
&\qquad + (42^2 \cdot 2^2 - 42 \cdot 13^2)b_m^2\\
&\qquad = a_m^2 - 42b_m^2.
\end{aligned}$$

(ii) $$\left.\begin{aligned}
337 &= 52 \cdot 6 \ + 25,\\
52 &= 25 \cdot 2 \ + 2,\\
25 &= \ 2 \ \cdot 12 + 1,
\end{aligned}\right\} \text{dolayısıyla} \left\{\begin{aligned}
1 &= 25 - 2 \cdot 12\\
&= 25 - (52 - 25 \cdot 2) \cdot 12\\
&= 25 \cdot 25 - 52 \cdot 12\\
&= (337 - 52 \cdot 6) \cdot 25 - 52 \cdot 12\\
&= 337 \cdot 25 - 52 \cdot 162.
\end{aligned}\right.$$

*Çözüm.* $(k+1)\cdot n = k\cdot n + n$, çünkü

$$\begin{aligned}
(k+1)\cdot 1 &= k+1 && [\cdot\ \text{tanımı}]\\
&= k\cdot 1 + 1, && [\cdot\ \text{tanımı}]
\end{aligned}$$

ve ayrıca eğer

$$(k+1)\cdot n = k\cdot n + n$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned}
(k+1)\cdot(n+1) &= (k+1)\cdot n + (k+1) && [\cdot\ \text{tanımı}]\\
&= (k\cdot n + n) + (k+1) && [\text{hipotez}]\\
&= k\cdot n + (n+k) + 1 && [+\ \text{birleşmeli}]\\
&= k\cdot n + (k+n) + 1 && [+\ \text{değişmeli}]\\
&= (k\cdot n + k) + (n+1) && [+\ \text{birleşmeli}]\\
&= k\cdot(n+1) + (n+1). && [\cdot\ \text{tanımı}]
\end{aligned}$$

*Çözüm.* Çarpma değişmelidir çünkü

$$\begin{aligned}
k\cdot 1 &= k && [\cdot\ \text{tanımı}]\\
&= 1\cdot k, && [\text{verilir}]
\end{aligned}$$

ve ayrıca eğer

$$k\cdot n = n\cdot k$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned}
k\cdot(n+1) &= k\cdot n + k && [\cdot\ \text{tanımı}]\\
&= n\cdot k + k && [\text{hipotez}]\\
&= (n+1)\cdot k. && [\text{Önerme 1}]
\end{aligned}$$

*Çözüm.* Çarpma dağılır, çünkü

$$\begin{aligned}
k\cdot(m+1) &= k\cdot m + k && [\cdot\ \text{tanımı}]\\
&= k\cdot m + k\cdot 1, && [\cdot\ \text{tanımı}]
\end{aligned}$$

ve ayrıca eğer

$$k\cdot(m+n) = k\cdot m + k\cdot n$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned}
k\cdot(m+(n+1)) &= k\cdot((m+n)+1) && [+\ \text{birleşmeli}]\\
&= k\cdot(m+n) + k && [\cdot\ \text{tanımı}]\\
&= (k\cdot m + k\cdot n) + k && [\text{hipotez}]\\
&= k\cdot m + (k\cdot n + k) && [+\ \text{birleşmeli}]\\
&= k\cdot m + k\cdot(n+1). && [\cdot\ \text{tanımı}]
\end{aligned}$$

*Çözüm.* Çarpma birleşmelidir, çünkü

$$\begin{aligned}
(k\cdot m)\cdot 1 &= k\cdot m && [\cdot\ \text{tanımı}]\\
&= k\cdot(m\cdot 1), && [\cdot\ \text{tanımı}]
\end{aligned}$$

ve ayrıca eğer

$$(k\cdot m)\cdot n = k\cdot(m\cdot n)$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned}
(k\cdot m)\cdot(n+1) &= (k\cdot m)\cdot n + k\cdot m && [\cdot\ \text{tanımı}]\\
&= k\cdot(m\cdot n) + k\cdot m && [\text{hipotez}]\\
&= k\cdot(m\cdot n + m) && [\text{Önerme 3}]\\
&= k\cdot(m\cdot(n+1)). && [\cdot\ \text{tanımı}]
\end{aligned}$$