Aritmetik Fonksiyonlar

David Pierce

3 Mayıs 2024 taslağı

Burada hata yapmamaya çalışıyorum, ama yazının matematiğinde veya Türkçesinde bir hata bulursanız lütfen bana haber verin.

Tanım kümesi $\mathbb{N}$ olan bir fonksiyona **aritmetik** denir. Normalde değer kümesi $\mathbb{C}$'dir. Önemli örneklerden,

$$\begin{aligned}
\sigma(n) &= \textstyle\sum_{d|n} d,\\
\tau(n) &= \textstyle\sum_{d|n} 1 = |\{x \in \mathbb{N} \colon x \mid n\}|,\\
\varphi(n) &= |\mathbb{Z}_n{}^{\times}| = |\{x \in \mathbb{Z} \colon 0 \leqslant x < n \wedge \operatorname{ebob}(x, n) = 1\}|,\\
\operatorname{id}(n) &= n,\\
1(n) &= 1,\\
\varepsilon(1) &= 1 \wedge \varepsilon(n + 1) = 0,
\end{aligned}$$

eşitliklerinin tanımladığı σ, τ, φ, id, 1, ve ε aritmetik fonksiyonları vardır. Örneğin p asal olduğunda

$$\begin{aligned}
\sigma(p^n) &= 1 + p + \cdots + p^n = (p^{n+1} - 1)/(p-1),\\
\tau(p^n) &= n + 1,\\
\varphi(p^n) &= p^n - p^{n-1} = p^n \cdot (1 - 1/p).
\end{aligned}$$

Bir f aritmetik fonksiyonu için, eğer $\text{ebob}(a, b) = 1$ olduğunda

$$f(ab) = f(a) \cdot f(b)$$

ise, o zaman f **çarpımsaldır.** Örneğin id, 1, ve ε carpımsaldır. Ayrıca f çarpımsal olduğunda,

- eğer $f(1) = 0$ ise, o zaman $f(n) = f(n \cdot 1) = f(n) \cdot f(1) = 0$;
- eğer $f(1) \neq 0$ ise, o zaman $f(1) = 1$, çünkü $f(1) \cdot f(1) = f(1)$.

Teorem. φ *çarpımsaldır.*

Kanıt. Çin Kalan Teoremi sayesinde $\mathrm{ebob}(a,b) = 1$ ise

$$\mathbb{Z}_{ab} \cong \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b,$$

dolayısıyla

$$\mathbb{Z}_{ab}{}^{\times} \cong \mathbb{Z}_a{}^{\times} \times \mathbb{Z}_b{}^{\times},$$

ve sonuç olarak

$$\varphi(ab) = |\mathbb{Z}_{ab}{}^{\times}| = |\mathbb{Z}_a{}^{\times}| \cdot |\mathbb{Z}_b{}^{\times}| = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

□

Aritmetiğin Temel Teoremi sayesinde her n için, n'nin tüm p asal bölenleri için,

$$n = \sum_{p|n} p^{n(p)}$$

sağlayan $n(p)$ üsleri vardır. O zaman

$$\varphi(n) = \prod_{p|n} \varphi(p^{n(p)}) = n \prod_{p|n} (1 - 1/p) \, .$$

Eğer f ve g aritmetik fonksiyon ise, o zaman bunların $f * g$ **Dirichlet konvolüsyonü**

$$(f * g)(n) = \sum_{ab=n} f(a) \cdot g(b) = \sum_{d|n} f(d) \cdot g\,(n/d)$$

kuralı tarafından tanımlanır. Örneğin

$$\sigma = \mathrm{id} * 1$$

ve

$$\tau = 1 * 1.$$

Kullanmayacağımız bir örnekte *Riemann zeta fonksiyonu,*

$$\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 1/n^s$$

tarafından tanımlanır, ve bu durumda

$$\zeta(s) = \prod_p \bigl(1 + 1/p^s + 1/p^{2s} + \cdots\bigr) = \prod_p 1/(1 - p^{-s}).$$

Daha genelde her f aritmetik fonksiyonu için $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)/n^s$ *Dirichlet serisi* vardır, ve

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)/n^s\right)\sum_{n\in\mathbb{N}} g(n)/n^s = \sum_{n\in\mathbb{N}}(f*g)(n)/n^s.$$

Teorem. *Eğer f ve g çarpımsal ise, o zaman $f*g$ de çarpımsaldır.*

Kanıt. Aritmetiğin Temel Teoremi sayesinde $\operatorname{ebob}(a,b)=1$ ise, o zaman birebir ve örten olarak

$$(c,e)\mapsto ce\colon \{c\colon c\mid a\}\times\{e\colon e\mid b\}\to\{d\colon d\mid ab\}.$$

Bundan dolayı

$$
\begin{aligned}
(f * g)(ab) &= \textstyle\sum_{d|ab} f(d) \cdot g\,(ab/d) \\
&= \textstyle\sum_{c|a} \sum_{e|b} f(ce) \cdot g\,(ab/ce) \\
&= \textstyle\sum_{c|a} \sum_{e|b} f(c) \cdot f(e) \cdot g\,(a/c) \cdot g\,(b/e) \\
&= \textstyle\sum_{c|a} f(c) \cdot g\,(a/c) \sum_{e|b} f(e) \cdot g\,(b/e) \\
&= \left(\textstyle\sum_{c|a} f(c) \cdot g\,(a/c)\right) \sum_{e|b} f(e) \cdot g\,(b/e) \\
&= (f * g)(a) \cdot (f * g)(b).
\end{aligned}
$$

$\square$

Örneğin σ ve τ çarpımsaldır, dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
\sigma(n) &= \textstyle\prod_{p|n} (p^{n(p)+1} - 1)/(p - 1), \\
\tau(n) &= \textstyle\prod_{p|n} (n(p) + 1).
\end{aligned}
$$

Eğer $\sigma(n) = 2n$ ise, o zaman n **mükemmeldir.**

Teorem. *Çift mükemmel bir sayı olmak için, $2^n - 1$ farkının asal olduğu bir*

$$2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$$

çarpımı olmak, gerek ve yeter bir koşuldur.

Kanıt. Eğer $2^n - 1$ asal ise, o zaman

$$\sigma(2^{n-1} \cdot (2^n - 1)) = \sigma(2^{n-1}) \cdot \sigma(2^n - 1) = (2^n - 1) \cdot 2^n,$$

dolayısıyla $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ mükemmeldir. (Öklid bunu gösterdi.) Tersine a tek olduğunda $2^{n-1} \cdot a$ mükemmel ise, o zaman

$$2^n \cdot a = \sigma(2^{n-1} \cdot a) = (2^n - 1) \cdot \sigma(a),$$

dolayısıyla $2^n \mid \sigma(a)$, ve bu durumda bir b için

$$2^n \cdot b = \sigma(a).$$

Öyleyse

$$a = (2^n - 1) \cdot b = \sigma(a) - b,$$

ve sonuç olarak

$$\sigma(a) = a + b.$$

Ayrıca b, a'nın bir bölenidir. Eğer $n > 1$ ise, o zaman $b < a$, ve bu durumda $b = 1$ ve a asaldır. $\square$

Teorem. *$*$ işlemi değişmelidir ve birleşmelidir, ve her aritmetik f için*

$$f * \varepsilon = f,$$

ve $f(1) \neq 0$ ise

$$f * g = \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir g vardır. Bunlardan dolayı 1'de 0 olmayan aritmetik fonksiyonlar, $*$ altında abelyan bir grup oluşturur.

Kanıt. $*$ işlemi değişmelidir çünkü

$$
\begin{aligned}
(g * f)(n) &= \sum_{ab=n} g(a) \cdot f(b) \quad && [\text{tanım}] \\
&= \sum_{ab=n} f(b) \cdot g(a) \quad && [\,\cdot \text{ değişmeli}] \\
&= \sum_{ba=n} f(b) \cdot g(a) \quad && [\,\cdot \text{ değişmeli}] \\
&= (f * g)(n). && [\text{tanım}]
\end{aligned}
$$

İşlemin birleşmeli olduğu ve $f * \varepsilon = f$, **alıştırmadırlar.** Sonda f verildiğinde $f(1) \neq 0$ ise, özyineleme ile

$$g(1) = 1/f(1)$$

ve $n > 1$ olmak üzere

$$g(n) = -\sum_{ab=n \wedge a \neq 1} f(a) \cdot g(b)/f(1)$$

olsun. O zaman $f * g = \varepsilon$. $\square$

Teorem. *Eğer $f * g = \varepsilon$ ve f çarpımsal ise, o zaman g de çarpımsaldır.*

Kanıt. Tümevarım kullanacağız. Birden kesin büyük olan her m için, $m = ab$ ve $\mathrm{ebob}(a, b) = 1$ olduğunda,

$$g(m) = g(a) \cdot g(b)$$

göstereceğiz. Eğer bir n için n'nin m özbölenleri için iddia doğru ise, şimdi $n = ab$ ve $\mathrm{ebob}(a, b) = 1$ olsun. o zaman

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon(n) \\ &= (f * g)(n) \\ &= \textstyle\sum_{d|n} f(d) \cdot g(n/d) \\ &= \textstyle\sum_{c|a} \sum_{e|b} f(ce) \cdot g(ab/ce). \end{aligned}$$

Buna $f(1) \cdot (g(a)g(b) - g(ab))$ ekleyerek

$$
\begin{aligned}
f(1)\cdot(g(a)\cdot g(b)-g(ab)) &= \textstyle\sum_{c|a}\sum_{e|b} f(c)\cdot f(e)\cdot g(a/c)\cdot(b/e) \\
&= (f*g)(a)\cdot(f*g)(b) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ederiz, dolayısıyla $g(a)\cdot g(b)=g(ab)$. $\square$

Şimdi tanıma göre μ,

$$1*\mu=\varepsilon$$

eşitliğini sağlayan aritmetik fonksiyonu olsun.

Teorem. μ *çarpımsaldır,* $\mu(p^2)=0$*, ve*

$$p_1<\cdots<p_s \implies \mu(p_1\cdots p_s)=(-1)^s.$$

Teorem (Möbius Tersleme Teoremi)**.**

$$F=\sum_{d|n} f(d) \implies f(n)=\sum_{d|n} F(d)\cdot\mu(n/d).$$

Kanıt. $F = f * 1$ ise

$$F * \mu = (f * 1) * \mu = f * (1 * \mu) = f * \varepsilon = f.$$

$\square$

Teorem. $\varphi * 1 = \mathrm{id}$, *yani*

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

Kanıt. Her taraf çarpımsaldır ve

$$(\varphi * 1)(p^s) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant s} \varphi(p^k) = 1 + \sum_{0 < k \leqslant s} (p^k - p^{k-1}) = p^s.$$

$\square$

Alıştırmalar: Aşağıdaki eşitlikleri kanıtlayın.

$$\prod_{d|n} d = n^{\tau(n)}/2.$$

$$\sum_{d|n} 1/d = \sigma(n)/n.$$

$$\sum_{d|n} d \cdot \mu(d) = \prod_{p|n} (1 - p).$$

$$\sum_{d|n} \tau(d) \cdot \mu(d) = \prod_{p|n} -1.$$