Modeller Kuramı
(TASLAK)

David Pierce

23 Mart 2017

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul

dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

İçindekiler

Önsöz 3

1. Doğal sayılar 3

2. İmzalar ve yapılar 4
2.1. İmzalar 4
2.2. Yapılar 5
2.3. Örnekler 6

3. İfadeler 9
3.1. Terimler 9
3.2. Formüller 11
3.3. Doğruluk 12

4. Tanımlanabilirlik 15
4.1. İşlemler 15
4.2. Bağıntılar 16

5. Göndermeler 20
5.1. Homomorfizimler 20
5.2. Gömmeler 22
5.3. İzomorfizimler 24

Kaynaklar 25

A. Yunan Harfleri 28

B. Alman Harfleri 29

Önsöz

Bildiğim ve kullandığım modeller kuramı kitapları ilk yayım tarihlerine göre aşağıda sıralanmıştır.

1956 Robinson *Complete Theories* [13]
1963 Robinson *Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra* [12]
1965 Robinson *Non-standard Analysis* [14]
1967 Shoenfield *Mathematical Logic* [16]
1969 Bell & Slomson *Models and Ultraproducts: An Introduction* [1]
1973 Chang & Keisler *Model Theory* [2]
1985 Poizat *Cours de théorie des modèles* [11, 10]
1993 Hodges *Model Theory* [6]
1995 Rothmaler *Introduction to Model Theory* [15]
2002 Marker *Model Theory: An introduction* [8]
2003 Marcja & Toffalori *A Guide to Classical and Modern Model Theory* [7]
2012 Tent & Ziegler *A Course in Model Theory* [19]

Türkçe ifadelerde yardım ettiği için Ayşe Berkman'a teşekkür ederim. Ali Nesin'in *Analiz IV* kitabını da [9] matematiksel Türkçe örneği olarak kullandım. Bazı terimler, Grünberg ile Onart [4] ve Demirtaş [3] tarafından yazılmış kitaplardan alınmıştır.

1. Doğal sayılar

Çoğunlukla sıralı bir n-li $(a_1, \ldots, a_n)$ olarak yazılır, ama bu metinde $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ tercih ediliyor.

Tanıma göre ω, öyle ξ kümelerinin en küçüğüdür ki
1) $\varnothing \in \xi$, ve

2) her α kümesi için $\alpha \in \xi$ ise $\alpha \cup \{\alpha\} \in \xi$.
O zaman ω, **doğal sayılar kümesidir.** Özel olarak

$$0 = \varnothing, \qquad 1 = \{0\}, \qquad 2 = \{0, 1\}, \qquad 3 = \{0, 1, 2\},$$

ve genelde $n \in \omega$ ise

$$n = \{0, \ldots, n-1\}.$$

Her A kümesi için A^n kuvveti, elemanları n'den A'ya giden göndermeler olan kümedir. Bu şekilde A^n kuvvetinin aynı elemanı,

$$\vec{a}, \qquad (a_0, \ldots, a_{n-1}), \qquad (a_i \colon i < n), \qquad i \mapsto a_i$$

biçimlerinde yazılabilir. Özel olarak

$$A^0 = \{\varnothing\} = \{0\} = 1.$$

$\omega \setminus \{0\}$ kümesi, $\mathbb{N}$ **sayma sayıları kümesidir.**

2. İmzalar ve yapılar

2.1. İmzalar

$\mathbb{R}$ gerçel sayılar sıralanmış cisminin *imzası,*

$$\{+, 0, -, \times, 1, <\}$$

kümesidir. Burada

- 0 ve 1, *değişmezdir;*
- $+$ ve $\times$, 2-*konumlu işlem simgeleridir;*
- $-$, 1-konumlu işlem simgesidir;
- $<$, 2-konumlu *yüklemdir.*

Genelde bir **imzanın** her elemanı,

1) ya **değişmezdir,**
2) ya da bir n sayma sayısı için
   a) ya n-konumlu bir **işlem simgesidir,**
   b) ya da n-konumlu bir **yüklemdir.**

Bu metinde $\dot{\mathscr{I}}$ her zaman bir imza olacak.

2.2. Yapılar

$\mathbb{R}$ gerçel sayılar sıralanmış cismi bir *yapıdır.* İmzası $\dot{\mathscr{I}}$ olan bir **yapı,** öyle bir $(A, S \mapsto S^{\mathfrak{A}})$ sıralı ikilisidir ki

1) A bir kümedir, ve
2) $S \mapsto S^{\mathfrak{A}}$, tanım kümesi $\dot{\mathscr{I}}$ olan bir göndermedir, ve
   a) $\dot{\mathscr{I}}$'nin her d değişmezi için

$$d^{\mathfrak{A}} \in A;$$

   b) $\dot{\mathscr{I}}$'nin her n-konumlu F işlem simgesi için

$$F^{\mathfrak{A}} \colon A^n \to A,$$

   yani $F^{\mathfrak{A}}$, A'da n-konumlu bir **işlemdir;**
   c) $\dot{\mathscr{I}}$'nin her n-konumlu R yüklemi için

$$R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n,$$

   yani $R^{\mathfrak{A}}$, A'da n-konumlu bir **bağıntıdır.**

$(A, S \mapsto S^{\mathfrak{A}})$ yapısı, sadece $\mathfrak{A}$ olarak yazılabilir. Bu yapının **evreni,** A'dır. $\dot{\mathscr{I}}$'nin her S elemanı için $S^{\mathfrak{A}}$, S'nin $\mathfrak{A}$'daki **yorumudur.** İmzası $\dot{\mathscr{I}}$ olan yapılar

$$\mathbf{Yap}(\dot{\mathscr{I}})$$

sınıfını oluşturur.

Eğer $\dot{\mathscr{I}} = \{S_0, S_1, \dots\}$ ise $\mathfrak{A}$, $(A, S_0{}^{\mathfrak{A}}, S_1{}^{\mathfrak{A}}, \dots)$ olarak yazılabilir. Eğer farklı bir yapı $\mathfrak{A}$'nın evrenini kullanmazsa $\mathfrak{A}$, $(A, S_0, S_1, \dots)$ olarak yazılabilir. Normalde bir $\mathfrak{B}$ yapısının evreni B, ve saire (sayfa 29'a bakın); ama tutarlı olmak zor veya imkânsızdır.

Örnek 1. Gerçel sayılar kümesi R ise, o zaman gerçel sayılar sıralanmış cismi $(R, +^{\mathfrak{R}}, 0^{\mathfrak{R}}, -^{\mathfrak{R}}, \times^{\mathfrak{R}}, 1^{\mathfrak{R}}, <^{\mathfrak{R}})$; ama normalde $\mathbb{R}$ ifadesi hem küme hem de sıralanmış cisim için kullanılır.

2.3. Örnekler

1. Aşağıdaki yapı örnekleri matematikte sık sık kullanılıyor.

a) $(\mathbb{C}, +, 0, -, \times, 1)$ karmaşık sayılar cismi.
b) p asal olmak üzere p-elemanlı $(\mathbb{F}_p, +, 0, -, \times, 1)$ cismi.
c) $(\mathbb{Q}, +, 0, -, \times, 1, <)$ kesirli sayılar sıralanmış cismi.
d) Bir $(G, \times, \mathrm{e}, {}^{-1})$ grubu.
e) $(\mathbb{Q}, +, 0, -)$ abelyan grubu.
f) $(\mathbb{Z}, +, 0, -)$ tamsayılar abelyan grubu.
g) $(\mathbb{Z}, +, 0, -, \times, 1)$ tamsayılar değişmeli halkası.
h) $(\mathbb{Q}, <)$ kesirli sayılar doğrusal sırası.
i) $(\omega, <)$ doğal sayılar doğrusal sırası.
j) $(\mathbb{N}, \mid)$ parçalı sırası.

2. Bir $(K, +, 0, -, \times, 1)$ cismi verilirse

$$\mathrm{Mat}^{2\times 2}(K) = \left\{ \begin{bmatrix} x_0^0 & x_1^0 \\ x_0^1 & x_1^1 \end{bmatrix} : x_j^i \in K \right\}, \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $(\mathrm{Mat}^{2\times 2}(K), +, 0, -, \times, I)$ değişmeli olmayan matrisler halkası elde edilebilir.

3. Bir Ω kümesinin altkümeleri

$$\mathscr{P}(\Omega)$$

kuvvet kümesini oluşturur, ve bu kümeden

a) $(\mathscr{P}(\Omega), \subseteq)$ parçalı sırası,

b) $(\mathscr{P}(\Omega), \cup, \varnothing, \cap, \Omega, ')$ **Boole cebiri**

elde edilir.

4. Herhangi küme, imzası boş olan bir yapıdır.

5. Eğer E, bir A kümesinde bir denklik bağıntısı ise, o zaman (A, E) sıralı ikilisi bir yapıdır. Bu durumda $b \in A$ ise b'nin $\{x \in A \colon x \ E \ b\}$ denklik sınıfı $[b]$ olarak yazılabilir. O zaman tanıma göre

$$A/E = \{[x] \colon x \in A\}.$$

6. $n \in \mathbb{N}$ ise n modülüne göre kalandaşlık, $\mathbb{Z}$'de bir denklik bağıntısıdır. Bu durumda $\mathbb{Z}_n = \{[x] \colon x \in \mathbb{Z}\}$ ise

$$(\mathbb{Z}_n, +, 0, -, \times)$$

değişmeli halkası elde edilir.

7. Eğer K bir cisim ise, o zaman K üzerinde vektör uzaylarının imzası

$$\{+, \mathbf{0}, -\} \cup \{F_a \colon a \in K\}$$

olarak alınabilir. Şimdi $\mathfrak{V}$, K üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $\boldsymbol{u} \in V$ ise, o zaman tanıma göre

$$F_a{}^{\mathfrak{V}}(\boldsymbol{u}) = a \cdot \boldsymbol{u}.$$

Her n sayma sayısı için $\mathfrak{V}$'nin imzasına yeni n-konumlu bir $\|_n$ yüklemi eklenebilir, ve bu simgenin $\mathfrak{V}$'deki yorumu, n-konumlu doğrusal bağımlılık olabilir. Bu şekilde $(\boldsymbol{u}_0, \dots, \boldsymbol{u}_{n-1}) \in \|_n{}^{\mathfrak{V}}$ ancak ve ancak K'nin, biri 0 olmayan bazı a_i elemanları için

$$F_{a_0}{}^{\mathfrak{V}}(\boldsymbol{u}_0) + \cdots + F_{a_{n-1}}{}^{\mathfrak{V}}(\boldsymbol{u}_{n-1}) = \mathbf{0}.$$

O zaman $(V, \|_1, \|_2, \|_3, \dots)$ yapısı incelenebilir.

8. Tekrar K bir cisim olsun, ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman K^{n+1} kuvveti, bir V iç çarpım uzayı olarak anlaşılabilir. V'nin her $\boldsymbol{a}$ elemanı $\begin{bmatrix} a^0 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}$ sütun vektörü olarak alınsın. Eğer V^n kuvvetinin $(\boldsymbol{a}_j \colon j < n)$ elemanı verilirse, $i \leqslant n$ olmak üzere

$$A_i = \begin{bmatrix} a_0^0 & \cdots & a_{n-1}^0 \\ \vdots & & \vdots \\ \widehat{a_0^i} & \cdots & \widehat{a_{n-1}^i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_0^n & \cdots & a_{n-1}^n \end{bmatrix}$$

olsun. Yani $n \times (n-1)$'lik $(\boldsymbol{a}_0 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_{n-1})$ matrisinin i'ninci satırı silinirse kare A_i matrisi elde edilsin. Şimdi

$$X(\boldsymbol{a}_j \colon j < n) = \begin{bmatrix} \det(A_0) \\ \vdots \\ (-1)^j \det(A_j) \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \det(A_n) \end{bmatrix}$$

olsun. Bu şekilde V'nin her $\boldsymbol{u}$ elemanı için

$$\boldsymbol{u} \cdot X(\boldsymbol{a}_j \colon j < n) = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} & \boldsymbol{a}_0 & \cdots & \boldsymbol{a}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Burada X, V'de n-konumlu işlemdir. Eğer $n = 2$ ise $X(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, normal $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ çapraz çarpımıdır [18].

3. İfadeler

3.1. Terimler

Her n doğal sayısı için

$$x_n$$

simgesi **değişken** olarak anlaşılsın. Bunların yerine x, y, z falan kullanılabilir. Şimdi, her imzada, *özyinelemeyle,* **terimler** tanımlar:

1) Her değişken, bir terimdir.
2) her değişmez bir terimdir;
3) her m sayma sayısı için, her m-konumlu F işlem simgesi için, tüm $t_0, \ldots, t_{m-1}$ terimleri için,

$$Ft_0 \cdots t_{n-1}$$

ifadesi de terimdir.

Normalde $n = 2$ durumunda Ft_0t_1 ifadesinin yerine $(t_0\ F\ t_1)$ kullanılır.

Terimlerin tanımı özyinelemeli olduğundan tümevarımlı kanıtlar mümkündür: Bir imzada, bir A kümesi

1) her değişken içerirse,
2) her değişmez içerirse,
3) her m sayma sayısı için, her m-konumlu F işlem simgesi için, A'nın zaten $t_0, \ldots, t_{m-1}$ terimlerini içerdiği $Ft_0 \cdots t_{m-1}$ terimini içerirse,

o zaman A, her terimi içerir.

Hiçbir değişkenin gözükmediği terim **sabittir.** Sabit terimlerin tanımı da özyinelemeli biçimde konulabilir:

Teorem 1. *Bir imzada, bir A kümesi*
1) her değişmez içersin;

2) her m sayma sayısı için, her m-konumlu F işlem simgesi için, A'nın zaten $t_0, \ldots, t_{m-1}$ terimlerini içerdiği $Ft_0 \cdots t_{m-1}$ terimi içersin.

O zaman A, her sabit terim içerir.

Kanıt. İmzanın sabit olmayan terimleriyle A'nın elemanları, B kümesini oluştursun. Kısaca

$$B = A \cup \{\text{sabit olmayan terimler}\}.$$

1. Her değişken, sabit olmadığından B'dedir.
2. Her değişmez, sabit olduğundan A'dadır, dolayısıyla B'dedir.
3. $m \in \mathbb{N}$ ve F, m-konumlu bir işlem simgesi olsun, ve $t_0, \ldots, t_{m-1}$ terimleri B'de olsun. Bu terimlerin her biri ya sabit değildir ya da A'dadır. Biri sabit değilse $Ft_0 \cdots t_{m-1}$ terimi de sabit değildir, dolayısıyla bu terim B'dedir. Eğer $t_0, \ldots, t_{m-1}$ terimlerinin her biri A'da ise, o zaman varsayıma göre $Ft_0 \cdots t_{m-1}$ terimi de A'dadır, dolayısıyla bu terim B'dedir.

Tümevarımdan B her terim içerir. Özel olarak A, her sabit terim içerir. □

Eğer t, $\dot{\mathscr{I}}$'nin sabit bir terimiyse, ve $\mathfrak{A} \in \mathbf{Yap}(\dot{\mathscr{I}})$ ise, t'nin $\mathfrak{A}$'daki $t^{\mathfrak{A}}$ *yorumunu* tanımlamak isteriz. Eğer t bir değişmez ise, o zaman $t^{\mathfrak{A}}$ zaten tanımlandı. Genel tanım özyinelemeli olacak, ama yapabilmemiz için bir teorem gerekir.

Teorem 2. *Eğer $t_0, \ldots, t_{m-1}, u_0, \ldots, u_{m-1}$ terim ise, ve $Ft_0 \cdots t_{m-1}$ ve $Fu_0 \cdots u_{m-1}$ terimleri birbiriyle aynı ise, o zaman m'nin her k elemanı için t_k ve u_k aynıdır.*

Kanıt. Tümevarımla her terim için hem sonuna yeni simgeler ekleyerek, hem de sonundan simgeler kaldırarak yeni bir terim elde etmeyeceğiz. Bunu göstermek yeter... □

Şimdi $t^{\mathfrak{A}}$ yorumuna özyinelemeli bir tanım verilebilir:

1. t değişmez ise dediğimiz gibi $t^{\mathfrak{A}}$ zaten tanımlandı.
2. Eğer t, $Ft_0 \cdots t_{m-1}$ biçimindeyse ve ${t_k}^{\mathfrak{A}}$ yorumları tanımlanırsa

$$(Ft_0 \cdots t_{n-1})^{\mathfrak{A}} = F^{\mathfrak{A}}({t_0}^{\mathfrak{A}}, \ldots, {t_{n-1}}^{\mathfrak{A}}).$$

Her durumda $t^{\mathfrak{A}} \in A$. (Bunun kanıtı tümevarımla verilebilir.)

Örnek 2. Her durumda ${t_k}^{\mathbb{F}_p} = 1$ ise

$$(\cdots(t_0 + t_1) + \cdots + t_{p-1})^{\mathbb{F}_p} = 0.$$

3.2. Formüller

Değişkenler ve değişmezler, "bölünemez" terimlerdir, ama normalde bu şekilde konuşmuyoruz. Yine de **bölünemez formüllerin** iki çeşiti vardır:

1. Eğer t ve u terim ise, o zaman

$$t = u$$

denklemi bölünemez bir formüldür.

2. Eğer R, m-konumlu yüklem ise, ve t_0, …, t_{m-1} terim ise, o zaman

$$Rt_0 \cdots t_{m-1}$$

ifadesi bölünemez bir formüldür.

Bu tanım, özyinelemeli değildir. Ama **formüllerin** tanımı, özyinelemelidir:

1) (Tabii ki) her bölünemez formül, bir formüldür.
2) φ ve ψ formül ise

$$(\varphi \wedge \psi)$$

de formüldür.

3) φ formül ise

$$\neg\varphi$$

de formüldür.

4) φ formül ve x değişken ise

$$\exists x\ \varphi$$

de formüldür.

Formüller için Teorem 2 gibi bir teorem doğrudur, dolayısıyla formüller kümesinde aşağıdaki gibi özyinelemeli tanımlar yapılabilir:

1) φ bölünemez ise

$$\mathrm{sd}(\varphi),$$

φ'de gözüken değişkenlerin oluşturduğu kümedir.

2) $\mathrm{sd}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{sd}(\varphi) \cup \mathrm{sd}(\psi)$.
3) $\mathrm{sd}(\neg\varphi) = \mathrm{sd}(\varphi)$.
4) $\mathrm{sd}(\exists x\ \varphi) = \mathrm{sd}(\varphi) \setminus \{x\}$.

$\mathrm{sd}(\varphi)$ kümesinin elemanları, φ'nin **serbest değişkenleridir.**

3.3. Doğruluk

Hiç serbest değişkeni olmayan bir formül, bir **cümledir.** $\dot{\mathscr{I}}$ imzasının her cümlesi, imzası $\dot{\mathscr{I}}$ olan her yapında ya *yanlıştır* ya da *doğrudur.* Bu koşulların tanımlanması için daha fazla kavramlar gerekiyor.

Her α bölünemez formülünde, bir x değişkeninin her geçişinin yerine bir t terimi konulursa

$$(\alpha_t^x)$$

formül elde edilir. Ayrıca y x'ten farklı bir değişken olmak üzere

$$((\varphi_t^x) \wedge (\psi_t^x)) \text{ formülüdür } ((\varphi \wedge \psi)_t^x),$$
$$\neg(\varphi_t^x) \text{ formülüdür } (\neg\varphi_t^x),$$
$$\exists x\ \varphi \text{ formülüdür } (\exists x\ \varphi_t^x),$$
$$\exists y\ (\varphi_t^x) \text{ formülüdür } (\exists y\ \varphi_t^x).$$

$\mathscr{J}$, $\dot{\mathscr{I}}$ imzasını kapsayan bir imza olsun, ve $\mathfrak{A} \in \mathbf{Yap}(\dot{\mathscr{I}})$, $\mathfrak{B} \in \mathbf{Yap}(\mathscr{J})$ olsun. Eğer $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$'nin evrenleri aynı (yani $A = B$) ise, ve $\dot{\mathscr{I}}$'nin her S elemanı

$$S^{\mathfrak{A}} = S^{\mathfrak{B}}$$

ise, o zaman $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$'nın $\mathscr{J}$'ye bir **açılımıdır.**

Eğer $\mathfrak{A} \in \mathbf{Yap}(\dot{\mathscr{I}})$ ve $X \subseteq A$ ise, o zaman X'in her a elemanı, yeni bir değişmez olarak anlaşılabilir. Bu değişmezler $\dot{\mathscr{I}}$'ye eklenirse

$$\dot{\mathscr{I}}(X)$$

imzası elde edilsin. O zaman $\mathfrak{A}$'nın $\dot{\mathscr{I}}(X)$'e $\mathfrak{A}_X$ açılımı vardır, ve burada, X'in her a elemanının yorumu kendisidir:

$$a^{\mathfrak{A}_X} = a.$$

Eğer bir σ cümlesi $\mathfrak{A}$'da **doğru** ise

$$\mathfrak{A} \vDash \sigma$$

ifadesini yazarız. Tanımı şimdi verebiliriz.

1) $t^{\mathfrak{A}} = u^{\mathfrak{A}}$ ise $\mathfrak{A} \vDash t = u$.
2) $(t_0{}^{\mathfrak{A}}, \ldots, t_{n-1}{}^{\mathfrak{A}}) \in R^{\mathfrak{A}}$ ise $\mathfrak{A} \vDash Rt_0 \cdots t_{n-1}$.
3) $\mathfrak{A} \vDash \sigma$ ve $\mathfrak{A} \vDash \tau$ ise $\mathfrak{A} \vDash (\sigma \wedge \tau)$.

4) $\mathfrak{A} \vDash \sigma$ değilse $\mathfrak{A} \vDash \neg\sigma$.

5) A'nın bir a elemanı için $\mathfrak{A}_{\{a\}} \vDash \varphi_a^x$ ise $\mathfrak{A} \vDash \exists x\ \varphi$.

Eğer σ $\mathfrak{A}$'da doğru değilse **yanlıştır.**

Bazı kısaltmalardan faydalanabiliriz:

$$t \neq u \text{ demek } \neg\ t = u,$$
$$(\varphi \vee \psi) \text{ demek } \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi),$$
$$(\varphi \to \psi) \text{ demek } (\neg\varphi \vee \psi),$$
$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \text{ demek } ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)),$$
$$\forall x\ \varphi \text{ demek } \neg\exists x\ \neg\varphi.$$

Bazı ayraçlar atlanabilir. Örneğin

$$(\varphi \wedge \psi \wedge \theta) \text{ demek } (\varphi \wedge (\psi \wedge \theta)),$$
$$(\varphi \to \psi \to \theta) \text{ demek } (\varphi \to (\psi \to \theta)),$$
$$(\varphi \wedge \psi \to \theta) \text{ demek } ((\varphi \wedge \psi) \to \theta).$$

Örnek 3.

1. $\forall x\ \exists y\ (x \neq 0 \to xy = 1)$ cümlesi her cisimde doğrudur ama $(\mathbb{Z}, +, 0, -, \times, 1)$ halkasında yanlıştır.

2. $\forall x\ \exists y\ (y^2 = x \vee y^2 = -x)$ cümlesi $(\mathbb{R}, +, 0, -, \times, 1)$ cisminde doğrudur ama $(\mathbb{Q}, +, 0, -, \times, 1)$ cisminde yanlıştır.

3. $\forall x\ \forall y\ \exists z\ (x < y \to x < z \wedge z < y)$ cümlesi $(\mathbb{Q}, <)$ sırasında doğrudur ama $(\mathbb{Z}, <)$ sırasında yanlıştır.

4. $\forall x\ \exists y\ \forall z\ xyz = z$ cümlesi $(\mathbb{Q}, \times)$ yapısında doğrudur ama $(\mathbb{Z}, \times)$ yapısında yanlıştır.

4. Tanımlanabilirlik

4.1. İşlemler

$\dot{\mathscr{I}}$ imzasından gelen, değişkenleri $\{x_i \colon i < n\}$ kümesinden gelen terimler

$$\mathrm{Tm}^n(\dot{\mathscr{I}})$$

kümesini oluştursun. Böyle terimlere n-konumlu denebilir, fakat bu durumda her n-konumlu terim $(n+1)$-konumlu dadır:

$$\mathrm{Tm}^0(\dot{\mathscr{I}}) \subseteq \mathrm{Tm}^1(\dot{\mathscr{I}}) \subseteq \mathrm{Tm}^2(\dot{\mathscr{I}}) \subseteq \cdots$$

Eğer $t \in \mathrm{Tm}^n(\dot{\mathscr{I}})$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{Yap}(\dot{\mathscr{I}})$, ve $\vec{a} \in A^n$ ise, $i < n$ olmak üzere her x_i değişkeninin t'deki her geçişinin yerine a_i konulduğu terim

$$t(\vec{a})$$

olarak yazılsın. Özyinelemeli bir tanım verilebilir:

1. $i < n$ ise $x_i(\vec{a})$, a_i olur.
2. d değişmezse $d(\vec{a})$, d olur.
3. m'nin her k elemanı $t_k(\vec{a})$, u_k ise ve F, m-konumlu yüklem ise $Ft_0 \cdots t_{m-1}(\vec{a})$, $Fu_0 \cdots u_{m-1}$ olur.

Şimdi

$$t^{\mathfrak{A}},\ A \text{ kümesinin } n\text{-konumlu } \vec{a} \mapsto t(\vec{a})^{\mathfrak{A}} \text{ işlemi}$$

olsun. Kısaca

$$t^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = t(\vec{a})^{\mathfrak{A}}. \tag{1}$$

Özel olarak

$$\begin{aligned} {x_i}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) &= a_i, \\ d^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) &= d^{\mathfrak{A}}, \\ (Ft_0 \cdots t_{m-1})^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) &= F^{\mathfrak{A}}({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \ldots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})). \end{aligned} \tag{2}$$

Genelde $X \subseteq A$ ise $\{t^{\mathfrak{A}} \colon t \in \mathrm{Tm}^n(\dot{\mathscr{I}}(X))\}$ kümesinin elemanları, $\mathfrak{A}$'nın X üzerinde n-konumlu **tanımlanabilir** işlemleridir.

Örnek 4. 1) bir $(G, \times, \mathrm{e}, {}^{-1})$ grubunda $a \in G$ olmak üzere

$$x \mapsto a^{-1}xa$$

işlemi tanımlanabilir;

2) bir $(K, +, 0, -, \times, 1)$ cisminde $a_i \in K$ olmak üzere

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

polinom işlemi tanımlanabilir.

4.2. Bağıntılar

$\dot{\mathscr{I}}$ imzasından gelen, serbest değişkenleri $\{x_i \colon i < n\}$ kümesinden gelen formüller

$$\mathrm{Fm}^n(\dot{\mathscr{I}})$$

kümesini oluştursun. Böyle formüllere n-konumlu denebilir, fakat bu durumda her n-konumlu formül $(n+1)$-konumlu dadır:

$$\mathrm{Fm}^0(\dot{\mathscr{I}}) \subseteq \mathrm{Fm}^1(\dot{\mathscr{I}}) \subseteq \mathrm{Fm}^2(\dot{\mathscr{I}}) \subseteq \cdots$$

Eğer $\varphi \in \mathrm{Fm}^n(\dot{\mathscr{I}})$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{Yap}(\dot{\mathscr{I}})$, ve $\vec{a} \in A^n$ ise

$$((\cdots(\varphi_{a_0}^{x_0})\cdots)_{a_{n-1}}^{x_{n-1}})$$

ifadesinin yerine

$$\varphi(\vec{a})$$

yazalım. O zaman

$$\varphi^{\mathfrak{A}} = \{\vec{a} \in A^n \colon \mathfrak{A} \vDash \varphi(\vec{a})\}$$

olsun. Bu şekilde

$$\vec{a} \in \varphi^{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{A} \vDash \varphi(\vec{a}). \tag{3}$$

Özel olarak $t \in \mathrm{Tm}^n(\dot{\mathscr{I}})$ ise

$$(t = x_n)^{\mathfrak{A}} = \{(\vec{a}, b) \in A^{n+1} \colon t^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = b^{\mathfrak{A}}\}.$$

Eğer $t_i \in \mathrm{Tm}^n(\dot{\mathscr{I}})$ ise

$$(t_0 = t_1)^{\mathfrak{A}} = \{\vec{a} \in A^n \colon {t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}) = {t_1}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})\}, \tag{4}$$

ve R m-konumlu yüklem ise

$$(Rt_0 \cdots t_{m-1})^{\mathfrak{A}} = \{\vec{a} \in A^n \colon ({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \ldots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) \in R^{\mathfrak{A}}\}. \tag{5}$$

Ayrıca

$$(x_0 = x_0 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} = x_{n-1})^{\mathfrak{A}} = A^n, \tag{6}$$

$$\neg\varphi^{\mathfrak{A}} = A^n \smallsetminus \varphi^{\mathfrak{A}}, \tag{7}$$

ve $\psi \in \mathrm{Fm}^n(\dot{\mathscr{I}})$ ise

$$(\varphi \wedge \psi)^{\mathfrak{A}} = \varphi^{\mathfrak{A}} \cap \psi^{\mathfrak{A}},$$
$$(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{A}} = \varphi^{\mathfrak{A}} \cup \psi^{\mathfrak{A}}.$$

Şimdi π, A^{n+1} kuvvetinden A^n kuvvetine giden

$$(a_0, \ldots, a_n) \mapsto (a_0, \ldots, a_{n-1})$$

göndermesi olsun. $X \subseteq A^{n+1}$ ise $\pi[X]$ (yani $\{\pi(\vec{a})\colon \vec{a} \in X\}$), X'in **izdüşümüdür.** Eğer $\theta \in \mathrm{Fm}^{n+1}(\dot{\mathscr{I}})$ ise $\exists x_n\ \theta^{\mathfrak{A}}$, $\theta^{\mathfrak{A}}$'nın izdüşümüdür:

$$\exists x_n\ \theta^{\mathfrak{A}} = \pi\left[\theta^{\mathfrak{A}}\right].$$

Şimdi $X \subseteq A$ olmak üzere

$$\mathrm{Tan}^n_X(\mathfrak{A}) = \{\varphi^{\mathfrak{A}}\colon \varphi \in \mathrm{Fm}^n(\dot{\mathscr{I}}(X))\}$$

olsun. Bu kümenin elemanları, $\mathfrak{A}$'nın X üzerinde n-konumlu **tanımlanabilir** bağıntılarıdır. Kısaca X üzerinde tanımlanabilir bir bağıntı, X-tanımlanabilirdir.

$\mathrm{Tan}^n_X(\mathfrak{A})$, $\mathscr{P}(A^n)$ Boole cebirinin altcebiridir, yani $\cup$, $\cap$, ve $'$ işlemleri altında kapalıdır, ve boş kümeyi ve A^n kuvvetinin tümümü içerir.

Normalde (x_0, x_1, x_2) değişken listesinin yerine (x, y, z) kullanılır.

Örnek 5.

1. $(G, \times, \mathrm{e}, {}^{-1})$ bir grup ise $\{(a, a^{-1})\colon a \in G\}$ bağıntısı, $(G, \times, \mathrm{e})$ yapısında

$$xy = \mathrm{e}$$

formülü tarafından tanımlanır. Özel olarak bu formül ve

$$y = x^{-1}$$

formülü, aynı bağıntısını tanımlar. Ayrıca $(G, \times)$ yapısında $\{\mathrm{e}\}$ kümesi,

$$\forall y\ (xy = y \wedge yx = y)$$

tarafından tanımlanır. Aslında

$$\forall y\ xy = y, \qquad \exists y\ xy = y$$

formüllerinden her biri kullanılabilir. Sonuç olarak $(G, \times)$ yapısında $\{(a, a^{-1})\colon a \in G\}$ bağıntısı,

$$\exists z\ xyz = xz$$

formülü tarafından tanımlanır. Bu nedenle $(G, \times)$ yapısına da grup denebilir.

2. Benzer şekilde $(K, +, 0, -, \times, 1)$ bir cisim ise $(K, +, \times)$ yapısında $\{(a, -a)\colon a \in K\}$, $\{0\}$, ve $\{1\}$ bağıntıları $\varnothing$-tanımlanabilir.

3. $(\mathbb{R}, +, \times)$ cisminde $\{(x, y)\colon x \leqslant y\}$ sıralaması,

$$\exists z\ x + zz = y$$

tarafından tanımlanır.

4. Bir grubun **merkezi** $\forall y\ xy = yx$ tarafından tanımlanır.

Şimdi bölünemez formül tarafından tanımlanan bağıntılara **temel** densin. O zaman $\bigcup_{n\in\omega} \mathrm{Tan}^n_A(\mathfrak{A})$ birleşiminin her elemanı, kesişimler, tümleyenler, ve izdüşümler alınarak temel tanımlanabilir bağıntılardan elde edilibilir.

Bir formülde $\exists x$ ifadesi (ve $\neg\exists x\ \neg$ ifadesinin $\forall x$ kısaltması) bir **niceleyicidir.** Şimdi

$$\mathrm{Fm}^n_0(\dot{\mathscr{I}}) = \{\varphi \in \mathrm{Fm}^n(\dot{\mathscr{I}})\colon \varphi \text{ niceleyicisiz}\}$$

olsun. Bu kümeye özyinelemeli bir tanım verilebilir, yani Teorem 1 gibi bir teorem vardır:

Teorem 3. *Bir A kümesi için,*

1. *a) $\{t, u\} \subseteq \mathrm{Tm}^n(\dot{\mathscr{I}})$ ise $t = u \in A$ olsun;*
   b) R, $\dot{\mathscr{I}}$'nin m-konumlu bir yüklem ise, ve $\{t_0, \ldots, t_{m-1}\} \subseteq \mathrm{Tm}^n(\dot{\mathscr{I}})$ ise, o zaman $Rt_0 \cdots t_{m-1} \in A$ olsun;
2. *$\varphi \in A$ ise $\neg\varphi \in A$ olsun;*

3. $\{\varphi, \psi\} \subseteq A$ *ise* $(\varphi \wedge \psi) \in A$ *olsun.*
O zaman $\mathrm{Fm}_0^n \subseteq A$.

O zaman

$$\{\varphi^{\mathfrak{A}} \colon \varphi \in \mathrm{Fm}_0^n(\dot{\mathscr{I}}(X))\}$$

kümesi, $\mathscr{P}(A^n)$ Boole cebirinin, tüm temel tanımlanabilir bağıntıları içeren altcebirlerinin en küçüğüdür.

$\mathrm{Tan}_A^1(\mathfrak{A})$ kümesinin elemanları, $\mathfrak{A}$'nın tanımlanabilir kümeleridir. A'nın her sonlu $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ altkümesi

$$x = a_0 \vee \cdots \vee x = a_{n-1}$$

formülü tarafından tanımlanır. O zaman tümleyeni sonlu olan kümeler de tanımlanabilir.

5. Göndermeler

Bu bölümde bir $\dot{\mathscr{I}}$ imzasında $\mathfrak{A}$ ve $\mathfrak{B}$, imzası $\dot{\mathscr{I}}$ olan yapı olacaklar, ve $h \colon A \to B$. Eğer $\vec{a} \in A^n$ ise

$$h(\vec{a}) = (h(a_0), \ldots, h(a_{n-1})) \tag{8}$$

anlaşılabilir. O zaman $X \subseteq A^n$ ise

$$h[X] = \{h(\vec{a}) \colon \vec{a} \in X\}.$$

5.1. Homomorfizimler

Eğer $\dot{\mathscr{I}}$'nin her

1) d değişmezi için

$$h(d^{\mathfrak{A}}) = d^{\mathfrak{B}},$$

2) F işlem simgesi için

$$h \circ F^{\mathfrak{A}} = F^{\mathfrak{B}} \circ h, \tag{9}$$

3) R yüklemi için

$$h[R^{\mathfrak{A}}] \subseteq R^{\mathfrak{B}} \tag{10}$$

ise, o zaman h, $\mathfrak{A}$'dan $\mathfrak{B}$'ye giden bir **homomorfizim** veya **benzer yapı dönüşümüdür.** Bu durumda

$$h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$$

ifadesini yazalım.

Örnek 6.

1. $x \mapsto [x]\colon (\mathbb{Z}, +, \times) \to (\mathbb{Z}_n, +, \times)$.
2. $x \mapsto x\colon (\mathbb{N}, \mid) \to (\mathbb{N}, \leqslant)$.
3. $(x, y) \mapsto mx + ny\colon (\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n, +) \to (\mathbb{Z}_{mn}, +)$.

Teorem 4. *$h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ve t, $\dot{\mathscr{I}}$'nin bir terimi ise*

$$h \circ t^{\mathfrak{A}} = t^{\mathfrak{B}} \circ h. \tag{11}$$

Kanıt. Tümevarım kullanacağız.

1. $h({x_i}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) = h(a_i) = {x_i}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a}))$.
2. d değişmeziyse $h(d^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) = h(d^{\mathfrak{A}}) = d^{\mathfrak{B}} = d^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a}))$.
3. Bir m için F, m-konumlu bir yüklem ise, ve t'nin t_i olduğu durumda (11) iddiası doğru ise

$$\begin{aligned}
&h((Ft_0 \cdots t_{m-1})^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) \\
&\qquad = h(F^{\mathfrak{A}}({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \ldots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) && [(2)] \\
&\qquad = F^{\mathfrak{B}}(h({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \ldots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}))) && [(9)] \\
&\qquad = F^{\mathfrak{B}}(h({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})), \ldots, h({t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}))) && [(8)] \\
&\qquad = F^{\mathfrak{B}}({t_0}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a})), \ldots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a}))) && [\text{hipotez}] \\
&\qquad = (Ft_0 \cdots t_{m-1})^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a})). && [(2)]
\end{aligned}$$

Tümevarımla her t için iddia doğrudur. □

Teorem 5. *$h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ve φ, $\dot{\mathscr{I}}$'in bölünemez bir formülü ise*

$$h[\varphi^{\mathfrak{A}}] \subseteq \varphi^{\mathfrak{B}}.$$

Kanıt. φ'nin iki durumu vardır.

$$\begin{aligned}
\vec{a} \in (t_0 = t_1)^{\mathfrak{A}} &\implies t_0(\vec{a})^{\mathfrak{A}} = t_1(\vec{a})^{\mathfrak{A}}, && [(4)]\\
&\implies h(t_0(\vec{a})^{\mathfrak{A}}) = h(t_1(\vec{a})^{\mathfrak{A}})\\
&\implies h({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) = h({t_1}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) && [(1)]\\
&\implies {t_0}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a})) = {t_1}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a})) && [\text{Teorem } 4]\\
&\implies t_0(h(\vec{a}))^{\mathfrak{B}} = t_1(h(\vec{a}))^{\mathfrak{B}} && [(1)]\\
&\implies h(\vec{a}) \in (t_0 = t_1)^{\mathfrak{B}}, && [(4)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \in (Rt_0 \cdots t_{m-1})^{\mathfrak{A}}&\\
&\implies ({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \ldots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) \in R^{\mathfrak{A}} && [(5)]\\
&\implies h({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \ldots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) \in R^{\mathfrak{B}} && [(10)]\\
&\implies (h({t_0}^{\mathfrak{A}}(\vec{a})), \ldots, h({t_{m-1}}^{\mathfrak{A}}(\vec{a}))) \in R^{\mathfrak{B}} && [(8)]\\
&\implies ({t_0}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a})), \ldots, {t_{m-1}}^{\mathfrak{B}}(h(\vec{a}))) \in R^{\mathfrak{B}} && [\text{Teorem } 4]\\
&\implies h(\vec{a}) \in (Rt_0 \cdots t_{m-1})^{\mathfrak{B}}. && [(5)]
\end{aligned}$$

Her durumda $\vec{a} \in \varphi^{\mathfrak{A}} \implies h(\vec{a}) \in \varphi^{\mathfrak{B}}$. □

5.2. Gömmeler

$h\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ olsun. Eğer

1) h birebir ve
2) $\dot{\mathscr{I}}$'nin her R yüklemi için $h[R^{\mathfrak{A}}] = R^{\mathfrak{B}} \cap h[A]$

ise, o zaman h, $\mathfrak{A}$'nin $\mathfrak{B}$'ye bir **gömmesidir,** ve bu durumda

$$h\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\subseteq} \mathfrak{B}$$

ifadesini yazabiliriz.

Örnek 7.

1. $\mathbb{Z}_n = \{[0], \ldots, [n-1]\}$, ama $i \in n$ olmak üzere $h([i]) = i$ ise h, $(\mathbb{Z}_n, +)$ grubunun $(\mathbb{Z}, +)$ grubuna bir gömmesi değildir çünkü $[1] + [n-1] = [0]$ ama $1 + n - 1 = n$, ve $h([0]) \neq n$.
2. $[x] \mapsto [mx]\colon (\mathbb{Z}_n, +) \xrightarrow{\subseteq} (\mathbb{Z}_{mn}, +)$.
3. $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$, $[x] \mapsto [mx]$ tarafından $(\mathbb{Z}_{mn}, +, \times)$ halkasına gömülmez.
4. Tanıma göre $(a, b)\ E\ (x, y) \iff ay = bx$ ise

$$\mathbb{Q}^+ = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/E$$

olsun. Bu kümenin her $[(a, b)]$ elemanı, a/b veya

$$\frac{a}{b}$$

olarak yazılabilir. O zaman okuldaki gibe toplama ve çarpma $\mathbb{Q}^+$ kümesinde tanımlanabilir, ve

$$x \mapsto \frac{x}{1}\colon (\mathbb{N}, +, \times) \xrightarrow{\subseteq} (\mathbb{Q}^+, +, \times).$$

5. $(x, y) \mapsto \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +) \xrightarrow{\subseteq} (\mathrm{Mat}^{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$.
6. $x + \mathrm{i}y \mapsto \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} : (\mathbb{C}, +, \times) \xrightarrow{\subseteq} (\mathrm{Mat}^{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \times)$.

Eğer $h\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\subseteq} \mathfrak{B}$ ve h, $x \mapsto x$ özdeşlik göndermesiyse $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$'nin **altyapısıdır,** ve bu durumda

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$$

ifadesini yazarız.

Teorem 6. *$h\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\subseteq} \mathfrak{B}$ ve φ, $\dot{\mathscr{I}}$'in niceleyicisiz bir formül ise*

$$h[\varphi^{\mathfrak{A}}] = \varphi^{\mathfrak{B}} \cap h[A^n]. \tag{12}$$

Kanıt. Teorem 3'e göre tümevarım kullanacağız.

1. Şimdiki durumda Teorem 5'in adımları tersilenebilir, dolayısıyla φ bölünemez ise (12) iddiası doğrudur.
2. İddia φ'nin ψ olduğu durumda doğru ise

$$\begin{aligned}
\vec{a} \in \neg\varphi^{\mathfrak{A}} &\iff \vec{a} \in A^n \smallsetminus \varphi^{\mathfrak{A}} && [(7)]\\
&\iff h(\vec{a}) \in h[A^n] \smallsetminus h[\varphi^{\mathfrak{A}}] && [h \text{ birebir}]\\
&\iff h(\vec{a}) \in h[A^n] \smallsetminus (\varphi^{\mathfrak{B}} \cap h[A^n]) && [\text{hipotez}]\\
&\iff h(\vec{a}) \in h[A^n] \smallsetminus \varphi^{\mathfrak{B}}\\
&\iff h(\vec{a}) \in B^n \smallsetminus \varphi^{\mathfrak{B}}\\
&\iff h(\vec{a}) \in \neg\varphi^{\mathfrak{B}}. && [(7)]
\end{aligned}$$

3. İddia φ'nin ψ veya θ olduğu durumda doğru ise

$$\begin{aligned}
\vec{a} \in (\psi \wedge \theta)^{\mathfrak{A}} &\iff \vec{a} \in \psi^{\mathfrak{A}} \cap \theta^{\mathfrak{A}} && []\\
&\iff h(\vec{a}) \in h[\psi^{\mathfrak{A}}] \cap h[\theta^{\mathfrak{A}}] && []\\
&\iff h(\vec{a}) \in \psi^{\mathfrak{B}} \cap \theta^{\mathfrak{B}} && []\\
&\iff h(\vec{a}) \in (\psi \wedge \theta)^{\mathfrak{B}}.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak iddia her niceleyicisiz φ için doğrudur. □

5.3. İzomorfizimler

Eğer $h\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\subseteq} \mathfrak{B}$ ve $h[A] = B$ ise, o zaman h^{-1} de bir gömmedir, ve h bir **eşyapı dönüşümü** veya **izomorfizimdir.** Bu durumda

$$h : \mathfrak{A} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}$$

ifadesini yazalım.

Örnek 8.

1. $\text{ebob}(m,n)=1$ ise

$$(x,y)\mapsto mx+ny\colon (\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n,+)\xrightarrow{\cong}(\mathbb{Z}_{mn},+).$$

2. **Çin Kalan Teoremi.** $\text{ebob}(m,n)=1$, $an\equiv 1 \pmod m$ ve $bm\equiv 1 \pmod n$ ise

$$(x,y)\mapsto anx+bmy\colon (\mathbb{Z}_m\oplus\mathbb{Z}_n,+,\times)\xrightarrow{\cong}(\mathbb{Z}_{mn},+,\times).$$

Teorem 7. *$h\colon \mathfrak{A}\xrightarrow{\cong}\mathfrak{B}$ ise $\dot{\mathscr{I}}$'in her φ formülü için*

$$h[\varphi^{\mathfrak{A}}]=\varphi^{\mathfrak{B}}.$$

Kanıt. $\psi\in \text{Fm}^{n+1}(\dot{\mathscr{I}})$ ve iddia φ'nin ψ olduğu durumda doğru olsun, ve $\vec{a}\in A^n$ olsun. O zaman h eşleme olduğundan A'nın bir b elemanı için $(\vec{a},b)\in\psi^{\mathfrak{A}}$ ancak ve ancak B'nin bir c elemanı için $(h(\vec{a}),c)\in\psi^{\mathfrak{A}}$. Kısaca

$$h[\exists x_n\ \varphi^{\mathfrak{A}}]=\exists x_n\ \varphi^{\mathfrak{B}}.$$

Kanıtın kalanı, Teorem 6'nın kanıtı gibidir. □

Kaynaklar

[1] J. L. Bell and A. B. Slomson. *Models and ultraproducts: An introduction.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1969. Reissued by Dover, 2006.

[2] C. C. Chang and H. J. Keisler. *Model theory.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, third edition, 1990. First edition 1973.

[3] Abdurrahman Demirtaş. *Matematik Sözlüğü.* Bilim Teknik Kültür Yayınları, Ankara, 1986.

[4] Teo Grünberg and Adnan Onart. *Mantık Terimleri Sözlüğü*. Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, 1976.

[5] Roe-Merrill S. Heffner. *Brief German Grammar*. D. C. Heath and Company, Boston, 1931.

[6] Wilfrid Hodges. *Model theory*, volume 42 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[7] Annalisa Marcja and Carlo Toffalori. *A guide to classical and modern model theory*, volume 19 of *Trends in Logic—Studia Logica Library*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[8] David Marker. *Model theory: an introduction*, volume 217 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002.

[9] Ali Nesin. *Analiz IV*. Nesin Yayıncılık, İstanbul, 2011.

[10] Bruno Poizat. *Cours de théorie des modèles*. Bruno Poizat, Lyon, 1985. Une introduction à la logique mathématique contemporaine. [An introduction to contemporary mathematical logic].

[11] Bruno Poizat. *A course in model theory*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2000. An introduction to contemporary mathematical logic, Translated from the French by Moses Klein and revised by the author.

[12] Abraham Robinson. *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1963.

[13] Abraham Robinson. *Complete theories*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1977. With a preface by H. J. Keisler, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, first published 1956.

[14] Abraham Robinson. *Non-standard analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. Reprint of the second (1974) edition. With a foreword by Wilhelmus A. J. Luxemburg. First edition 1965.

[15] Philipp Rothmaler. *Introduction to Model Theory*, volume 15 of *Algebra, Logic and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 2000. Originally published in German in 1995.

[16] Joseph R. Shoenfield. *Mathematical logic*. Association for Symbolic Logic, Urbana, IL, 2001. reprint of the 1973 second printing.

[17] Herbert Weir Smyth. *Greek Grammar*. Harvard University Press, Cambridge, Massachussets, 1980. Revised by Gordon M. Messing, 1956. Eleventh Printing. Original edition, 1920.

[18] Michael Spivak. *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965.

[19] Katrin Tent and Martin Ziegler. *A Course in Model Theory*, volume 40 of *Lecture Notes in Logic*. Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA, 2012.

A. Yunan Harfleri

büyük	minüskül	çeviri	ad
A	α	a	alpha
B	β	b	bêta
Γ	γ	g	gamma
Δ	δ	d	delta
E	ε	e	epsilon (basit e)
Z	ζ	z	zêta
H	η	ê	êta
Θ	ϑ	th	thêta
I	ι	i	iôta
K	$\varkappa$	k	kappa
Λ	λ	l	lambda
M	μ	m	mü
N	ν	n	nü
Ξ	ξ	x, ks	xi
O	o	o	omikron (küçük o)
Π	π	p	pi
P	ρ	r	rhô
Σ	σ, ς	s	sigma
T	τ	t	taü
Υ	υ	y, ü	üpsilon (basit ü)
Φ	φ	ph, f	phi
X	χ	kh, ch	khi
Ψ	ψ	ps	psi
Ω	ω	ô	ômega (büyük ô)

Epsilon ve üpsilon "basittir" çünkü Orta Çağ'da αι ve οι birleşimlerinin telaffuzları aynıymış [17].

B. Alman Harfleri

𝔄 𝔞 𝔅 𝔟 ℭ 𝔠 𝔇 𝔡 𝔈 𝔢 𝔉 𝔣 𝔊 𝔤
ℌ 𝔥 ℑ 𝔦 𝔍 𝔧 𝔎 𝔨 𝔏 𝔩 𝔐 𝔪 𝔑 𝔫
𝔒 𝔬 𝔓 𝔭 𝔔 𝔮 ℜ 𝔯 𝔖 𝔰 𝔗 𝔱 𝔘 𝔲
𝔙 𝔳 𝔚 𝔴 𝔛 𝔵 𝔜 𝔶 ℨ 𝔷

Aşağıdaki yazılı biçimleri Heffner'in [5] kitabından alınır: