Modeller kuramı alıştırmaları

David Pierce

16 Mart 2017

Matematik Bölümü, MSGSÜ

Alıştırma 1. Derste sadece işlem simgesi olmayan imzaların terimlerini tanımladık. Şimdi her imzanın terimlerini tanımlayacağız. Tanıma göre her değişken bir **terimdir.** Ayrıca, rasgele bir imzada,

(i) her değişmez bir terimdir, ve

(ii) her n sayma sayısı için, her n-konumlu F işlem simgesi için, tüm t_0, …, t_{n-1} terimleri için

$$Ft_0 \cdots t_{n-1}$$

ifadesi de bir terimdir. Eğer $n = 2$ ise

$$(t_0 \; F \; t_1)$$

ifadesi de kullanılabilir.

Hiç değişkenin gözükmediği terim, **sabittir.** Bir $\dot{\mathscr{I}}$ imzası için $\mathfrak{A}$, imzası $\dot{\mathscr{I}}$ olan bir yapı olsun. Özyinelemeyle $\dot{\mathscr{I}}$'nin her sabit t teriminin $\mathfrak{A}$'daki $t^{\mathfrak{A}}$ yorumunu tanımlayacağız.

I. Eğer t bir değişmez ise, o zaman $t^{\mathfrak{A}}$ zaten tanımlanmıştır.

II. Ayrıca t, yukarıdaki $Ft_0 \cdots t_{n-1}$ terimiyse

$$t^{\mathfrak{A}} = F^{\mathfrak{A}}({t_0}^{\mathfrak{A}}, \ldots, {t_{n-1}}^{\mathfrak{A}}).$$

İmzasının hiç yüklemi olmayan bir yapı, bir **cebirdir.** (Örneğin gruplar, cisimler, ve vektör uzayları, cebirdir.) Şimdi bir $\mathfrak{A}$ cebirinin imzası

$\dot{\mathscr{I}}$ olsun; $\mathfrak{B}$'nin imzası aynı olsun; ve $h\colon A \to B$ olsun. $\dot{\mathscr{I}}$'nın her d değişmezi için

$$h(d^{\mathfrak{A}}) = d^{\mathfrak{B}}$$

olsun, ve her n için, $\dot{\mathscr{I}}$'nin her n-konumlu F işlem simgesi için, A^n kuvvetinin her $\vec{a}$ elemanı için

$$h(F^{\mathfrak{A}}(\vec{a})) = F^{\mathfrak{B}}(h(a_0), \dots, h(a_{n-1}))$$

olsun. Tümevarımla $\dot{\mathscr{I}}$'nin her sabit t terimi için

$$h(t^{\mathfrak{A}}) = t^{\mathfrak{B}}$$

gösterin. (Eğer ayrıca h bir eşlemeyse, o zaman bir **izomorfizimdir,** ve $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.)

Alıştırma 2. Verilen kümelerin verilen yapılarda tanımlanabildiğini gösterin.

a) {çift sayılar}, $(\mathbb{Z}, +)$'da

b) $\{1\}$, $(\mathbb{Z}, \times)$'da

c) {asal sayılar}, $(\mathbb{N}, \times, 1)$'de

d) {asal sayılar}, $(\mathbb{Z}, \times, 1)$'de

Alıştırma 3. G, $(\mathbb{Z}, +, 0, -)$ abelyan grubu olsun, ve H, G'nin $\{x + x\colon x \in \mathbb{Z}\}$ altgrubu olsun. (Bu durumda G/H bölümü $\mathbb{Z}_2$.) G'de

$$\{(x, y)\colon x + H = y + H\}$$

bağıntısını tanımlayan bir formül bulun.

Alıştırma 4. Abelyan grupların $\{+, 0, -\}$ imzası $\dot{\mathscr{I}}$ olsun. Bu imzada öyle σ ve τ cümlelerini bulun ki imzası $\dot{\mathscr{I}}$ olan her $\mathfrak{A}$ yapısı için

$$\mathfrak{A} \models \sigma \iff \mathfrak{A} \cong \mathbb{Z}_2,$$
$$\mathfrak{A} \models \tau \iff \mathfrak{A} \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Alıştırma 5. $\mathrm{Te}(\mathbb{Z}, +) \neq \mathrm{Te}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, +)$ gösterin.