Modeller kuramı alıştırmaları

David Pierce

6 Nisan 2017
Matematik Bölümü, MSGSÜ

Alıştırma 1. Herhangi formülde sol ayraç sayısının, sağ ayraç sayısına eşit olduğunu gösterin.

Alıştırma 2. $\{<\}$ imzasında $T_<$, doğrusal sıralamalar teorisi olsun, ve T, aksiyomları $T_<$ teorisinin aksiyomları ile

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \bigl(x < y \land (z \leqslant x \lor y \leqslant z)\bigr),$$
$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \bigl(y < x \land (z \leqslant y \lor x \leqslant z)\bigr)$$

olan teori olsun. $\{<\}$ imzasında, T teorisine göre niceleyicisiz formüle denk *olmayan* bir $\varphi(x, y)$ formülünü verin.

Alıştırma 3. Eğer $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{C}$ ve $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{C}$ ise

$$\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$$

elemanter kapsanmasını gösterin.

Alıştırma 4. ${T_<}^*$, uçsuz yoğun doğrusal sıralamalar teorisi olsun. Aşağıdaki her formül için serbest değişkenleri aynı olan ve ${T_<}^*$ teorisine göre denk olan niceleyicisiz formülü bulun.

a) $\exists y\ (x < y)$,

b) $\exists z\ (x < z \land z < y)$,

c) $\exists z\ (x < z \land y < z)$,

d) $\exists y\ (x_0 = y \land x_1 < y \land x_1 < x_2)$.

Alıştırma 5. İmzası $\{E\}$ olan $T_{2,\infty}$ teorisinin her $\mathfrak{A}$ modeli için $E^{\mathfrak{A}}$, iki sınıflı denklik bağıntısıdır, ve bu bağıntının her sınıf sonsuzdur.

a) $T_{2,\infty}$ için aksiyomları yazın.

b) Aşağıdaki her formül için serbest değişkenleri aynı olan ve $T_{2,\infty}$ teorisine göre denk olan niceleyicisiz formülü bulun.

   i. $\exists z\ \neg(x\ E\ z \lor y\ E\ z)$,

   ii. $\exists y\ (x_0\ E\ y \land x_1\ E\ y \land \neg\ x_2\ E\ y)$.

   iii. $\exists y\ (x_0\ E\ y \land x_1\ E\ y \land \neg\ x_2\ E\ y \land x_0 \neq y)$.

Alıştırma 6. φ ve ψ niceleyicisiz ise $\exists x\ \varphi \to \forall x\ \psi$ formülünü önekli biçimde (yani niceleyicilerin önde olduğu biçimde) yazın.

Alıştırma 7. Verilen kümelerin ve bağıntıların verilen yapılarda tanımlanabildiğini gösterin.

a) $\{$tek sayılar$\}$, $(\mathbb{Z}, +)$'da

b) $\{0\}$, $(\mathbb{Z}, \times)$'da

c) $\{0\}$, $(\omega, <)$'te

d) $\{(x, y) \in \omega^2 \colon y - x = 2\}$, $(\omega, <)$'te

e) $\{$bileşik sayılar$\}$, $(\mathbb{N}, \times, 1)$'de

f) $\{$pozitif sayılar$\}$, $(\mathbb{Z}, \times, 1)$'de

g) $[3, 5]$ aralığı, $(\mathbb{R}, +, \times)$'da

h) bir grubun, mertebesi 2 olan elemanları kümesi, grupta

i) bir G grubunun $\mathrm{Z}(G)$ merkezi (yani her elemanla değişen elemanlar kümesi), G'de

j) $\{(x, y) \in G^2 \colon x\,\mathrm{Z}(G) = y\,\mathrm{Z}(G)\}$, bir G grubunda

k) üçtane elemana denk olan elemanlar kümesi, denklik bağıntısıile donatılmış bir kümede

l) $\{$asal sayılar$\}$, $(\mathbb{N}, \mid\,)$'de

m) $\bigcup_{p \text{ asal}}\{p^k \colon k \in \omega\}$, $(\mathbb{N}, \mid\,)$'de

n) $\mathbb{Z}$, $(\mathbb{C}, +, \times, \exp)$'te