Modeller Kuramı (MAT 414)
Ara Sınavı

David Pierce

6 Nisan 2014

Problem 1. $T_<{}^*$, uçsuz yoğun doğrusal sıralamalar teorisi olsun. Aşağıdaki her formül için serbest değişkenleri aynı olan ve $T_<{}^*$ teorisine göre denk olan niceleyicisiz formülü bulun.

a) $\exists y\ (x < y)$,

b) $\exists z\ (x < z \wedge z < y)$,

c) $\exists z\ (x < z \wedge y < z)$,

d) $\exists y\ (x_0 = y \wedge x_1 < y \wedge x_1 < x_2)$.

Çözüm.

a) $x = x$,

b) $x < y$,

c) $x = x \wedge y = y$,

d) $x_1 < x_0 \wedge x_1 < x_2$.

Problem 2. $\mathfrak{A}$ bir $(A,<)$ doğrusal sıralaması, $n \in \omega$, ve $\vec{a} \in A^n$ olsun. Her i ve j için, $i < j < n$ durumunda,

- $a_i < a_j$ (yani $\mathfrak{A} \models a_i < a_j$) ise φ_{ij}, $x_i < x_j$ olsun,
- $a_i = a_j$ ise φ_{ij}, $x_i = x_j$ olsun,
- $a_j < a_i$ ise φ_{ij}, $x_j < x_i$ olsun.

Tanımımıza göre n-konumlu

$$\bigwedge_{i<j<n} \varphi_{ij}$$

formülü, $\vec{a}$ listesinin **sıralama tipidir.** Örneğin $\mathfrak{A} = (\omega, <)$ ve $n = 3$ durumunda $(0, 1, 1)$ listesinin sıralama tipi

$$x_0 < x_1 \wedge x_0 < x_2 \wedge x_1 = x_2,$$

ama $x_0 < x_1 \wedge x_2 < x_0 \wedge x_1 = x_2$ formülü, sıralama tipi değildir (çünkü bir sıralamada sağlanamaz). Şimdi S_n, n-konumlu sıralama tiplerinin sayısı olsun.

a) Hesaplamalarınızı göstererek tabloyu doldurun.

n	S_n
2	3
3	
4	

b) Aşağıdaki denklemi, x için çözün.

$$S_5 = 5! + \binom{5}{2} \cdot 4! + x + 5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 3 + \left(5 + \binom{5}{2}\right) \cdot 2 + 1.$$

Çözüm. $x = \binom{5}{3} \cdot 3! = 60$ ve

$$S_3 = 3! + \binom{3}{2} \cdot 2! + 1 = 6 + 6 + 1 = 13,$$

$$S_4 = 4! + \binom{4}{2} \cdot 3! + \binom{4}{3} \cdot 2 + \binom{4}{2} + 1 = 24 + 36 + 8 + 6 + 1 = 75.$$

Problem 3. İmzası $\{E\}$ olan $T_{2,\infty}$ teorisinin her $\mathfrak{A}$ modeli için $E^{\mathfrak{A}}$, iki sınıflı denklik bağıntısıdır, ve bu bağıntının her sınıf sonsuzdur.

a) $T_{2,\infty}$ için aksiyomları yazın.

b) Aşağıdaki her formül için serbest değişkenleri aynı olan ve $T_{2,\infty}$ teorisine göre denk olan niceleyicisiz formülü bulun.

  i. $\exists z\ \neg(x\ E\ z \lor y\ E\ z)$,

  ii. $\exists y\ (x_0\ E\ y \land x_1\ E\ y \land \neg\ x_2\ E\ y)$.

  iii. $\exists y\ (x_0\ E\ y \land x_1\ E\ y \land \neg\ x_2\ E\ y \land x_0 \neq y)$.

Çözüm. a) Aksiyomlar,

$$\begin{gathered}\forall x\ x\ E\ x,\\ \forall x\ \forall y\ (x\ E\ y \to y\ E\ x),\\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (x\ E\ y \land y\ E\ z \to x\ E\ z),\\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ (\neg x\ E\ y \to x\ E\ z \lor y\ E\ z),\end{gathered}$$

ve her n doğal sayısı için

$$\exists x_0\ \cdots \exists x_{2n-1}\ \Bigg(\neg x_0\ E\ x_n \land \bigwedge_{i<j<n} (x_i \neq x_j \land x_{n+i} \neq x_{n+j}) \land \\ \land \bigwedge_{0<i<n} (x_0\ E\ x_i \land x_n\ E\ x_{n+i})\Bigg).$$

b)

i. $x\ E\ y$,

ii. $x_1\ E\ x_0 \land \neg\ x_2\ E\ x_0$,

iii. aynı: $x_1\ E\ x_0 \land \neg\ x_2\ E\ x_0$.

Problem 4. a) φ ve ψ niceleyicisiz ise $\exists x\ \varphi \to \forall x\ \psi$ formülünü önekli biçimde (yani niceleyicilerin önde olduğu biçimde) yazın.

b) $T_{\mathbb{Q}}$, $\mathbb{Q}$ üzerinde doğrusal uzaylar teorisi olsun. $T_{\mathbb{Q}} \cup \{\sigma\}$ kümesinin tam bir teorinin aksiyom kümesi olduğu σ cümlesini yazın.

c) Boş imzada tam bir teorinin aksiyomları yazın.

d) Boş imzada kaç tane tam teori vardır? Kısaca açıklayın.

Çözüm.

a) $\forall x\, \forall y\, (\varphi \to \psi^x_y)$.

b) $\exists x\ x \neq 0$.

c) Her n doğal sayısı için

$$\exists x_0 \cdots \exists x_n \bigwedge_{i<j\leqslant n} x_i \neq x_j.$$

d) Her n için $n \in \omega$ ise T_n, n-elemanlı kümeler teorisi olsun, ve T_ω, yukarıdaki teori olsun. Bunlar boş imzadaki tam teorilerdir çünkü

- A sonlu ise bir n için $A \models T_n$;
- her n için T_n teorisinin modelleri izomorftur, dolayısıyla T_n tam ve $T_n = \mathrm{Th}(A)$;
- niceleyicilerin giderilmesinden T_ω teorisinin tamlığını biliyoruz;
- A sonsuz ise $A \models T_\omega$, dolayısıyla $\mathrm{Th}(A) = T_\omega$.