Vektör Uzayları

Lineer Cebir

David Pierce

5 Mayıs 2017
Matematik Bölümü, MSGSÜ
dpierce@msgsu.edu.tr
mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

Bu notlarda, alıştırma olarak

- her teorem, sonuç, ve örnek kanıtlanabilir;
- her matrisin yerine kesin örnekler konulup çalıştırılabilir.

İçindekiler

1 Vektör Uzayları

1 Tanım. Aşağıda, bir **cismin** aksiyomları soldadır; bu cisim üzerinde bir **vektör uzayının** aksiyomları, sağdadır:

$$
\begin{aligned}
x+(y+z) &= (x+y)+z, & \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) &= (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w},\\
x+0 &= x, & \boldsymbol{x}+\boldsymbol{0} &= \boldsymbol{x},\\
x+(-x) &= 0, & \boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{0},\\
x+y &= y+x, & \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u},\\
x\cdot(y+z) &= x\cdot y+x\cdot z, & x\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= x\cdot\boldsymbol{u}+x\cdot\boldsymbol{v},\\
(x+y)\cdot z &= x\cdot z+y\cdot z, & (x+y)\cdot\boldsymbol{u} &= x\cdot\boldsymbol{u}+y\cdot\boldsymbol{u},\\
(x\cdot y)\cdot z &= x\cdot(y\cdot z), & (x\cdot y)\cdot\boldsymbol{u} &= x\cdot(y\cdot\boldsymbol{u}),\\
1\cdot x &= x, & 1\cdot\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}.\\
x\cdot y &= y\cdot x, & &\\
\exists y\ (x\cdot y &= 1\lor x=0), & &
\end{aligned}
$$

2 Örnek. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ve (p asal olmak üzere) $\mathbb{Z}_p$, cisimdir.

3 Örnek. Eğer F bir cisim, $m \in \mathbb{N}$, ve $n \in \mathbb{N}$ ise, F üzerinde $m \times n$'lik matrisler

$$F^{m\times n}$$

vektör uzayını oluşturur. Özel olarak $m \times 1$'lik bir

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

sütun matrisleri,

$$(u_1, \dots, u_m)$$

m-bileşenlileri olarak anlaşılabilir; bu m-bileşenler

$$F^m$$

vektör uzayını oluşturur.

4 Örnek. Toplama $(u, v) \mapsto u \cdot v$ ve çarpma $(x, u) \mapsto u^x$ olmak üzere $(0, \infty)$ aralığı, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

5 Örnek. Bir A kümesinden $\mathbb{R}$'ye giden fonksiyonlar $\mathbb{R}$ üzerinde

$$\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$$

vektör uzayını oluşturur.

6 Örnek. Her F cismi için katsayıları F'den gelen, değişkeni X olan polinomlar F üzerinde

$$F[X]$$

vektör uzayını oluşturur.

7 Teorem. *Her vektör uzayında*

$$x \cdot \vec{0} = \vec{0}, \qquad 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}, \qquad -1 \cdot \vec{u} = -\vec{u}.$$

2 Uzayların Altuzayları

8 Tanım. Bir vektör uzayının bir altkümesi toplamaya ve çarpmaya göre kapalıysa altküme, vektör uzayın bir **altuzayıdır.**

9 Örnek. Eğer X özdeşlik fonksiyonu olarak anlaşılırsa $\mathbb{R}[X]$, $\mathscr{F}[\mathbb{R}, \mathbb{R}]$ uzayının bir altuzayı olur.

10 Örnek. Her n doğal sayısı için

$$\{f \in \mathbb{R}[X]\colon \operatorname{der}(f) \leqslant n\}$$

kümesi $\mathbb{R}[X]$ uzayının bir altuzayıdır.

11 Örnek. Her vektör uzayının aşikâr $\{\mathbf{0}\}$ altuzayıdır.

12 Teorem. *$A \in F^{m\times n}$ ise*

$$\{\boldsymbol{u} \in F^n\colon A\boldsymbol{u} = \mathbf{0}\}$$

çözüm kümesi, F^n'nin bir altuzayıdır.

13 Örnek. $\mathbb{R}^2$ uzayının

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x \geqslant 0 \ \ \& \ \ y \geqslant 0\},$$
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon xy \geqslant 0\}$$

altkümeleri, $\mathbb{R}^2$ uzayının altuzayı değildir.

14 Tanım. F bir cisim ve U, F üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer B, U'nun bir $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ altkümesiyese, o zaman F^n'nin her $(a_1, \dots, a_n)$ elemanı için

$$a_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 + \dots + a_n \cdot \boldsymbol{b}_n$$

toplamı, B'nin bir **lineer bileşimidir.** (Eğer $n = 0$ ise verilen lineer bileşim, $\mathbf{0}$ olur.) B'nin butün lineer bileşimleri, B'nin **(lineer) gergisini** oluşturur. Bu gergi ya

$$\langle \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n \rangle$$

ya da $\langle B \rangle$ olarak yazılabilir. Elemanları vektör olan bir küme, gergisini **üretiyor** ve gergisinin **üreteç kümesidir.**

15 Teorem. *F^m uzayının her $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ altkümesi için, $F^{m\times n}$ uzayının bir A elemanı için*

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle = \{\boldsymbol{u} \in F^m \colon A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\}.$$

16 Teorem. *$F^{m\times n}$ uzayının her A elemanı için, F^m uzayının bir $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ altkümesi için,*

$$\{\boldsymbol{u} \in F^m \colon A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\} = \langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle.$$

17 Teorem. *Bir vektör uzayının her altkümesinin gergisi, verilen uzayın altuzayıdır.*

18 Tanım. Bir F cismi üzerinde A, $m \times n$'lik bir $(a_{i\,j})$ matrisi ise A'nın

- i'ninci satırı F^n'nin $(a_{i\,1}, \dots, a_{i\,n})$ elemanı,
- j'ninci sütunu F^m'nin $(a_{1\,j}, \dots, a_{m\,j})$ elemanı

olarak anlaşılsın. A'nın

1) **satır uzayı,** A'nın satırlarının gergisidir;
2) **sütun uzayı,** A'nın sütunlarının gergisidir;
3) **sıfır uzayı,** $\{\boldsymbol{u} \in F^n \colon A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\}$ uzayıdır.

Bu uzaylar sırasıyla

$$\mathrm{sat}(A), \qquad \mathrm{süt}(A), \qquad \mathrm{s\imath f}(A)$$

olarak yazılsın. O zaman $\mathrm{sat}(A)$ ve $\mathrm{s\imath f}(A)$, F^n uzayının altuzayıdır; ve $\mathrm{süt}(A)$, F^m uzayının altuzayıdır.

3 Tabanlar

19 Tanım. U bir vektör uzayı ve B, U'nun bir $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ altkümesi olsun. Eğer

$$x_1\boldsymbol{b}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{0}$$

denkleminin sadece aşikâr çözümü varsa, o zaman B **lineer bağımsızdır.** Eğer B lineer bağımsız ve U'yu üretirse, o zaman B, U'nun bir **tabanıdır.**

20 Teorem. *A, bir*

$$\left[\ \boldsymbol{a}_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \boldsymbol{a}_n\ \right]$$

matrisi olsun, ve B, A'ya satırca denk olan, basamaklı bir $(b_{i\,j})$ matrisi olsun. Eğer bir ℓ için ve

$$k_1 < \cdots < k_\ell$$

eşitsizliğini sağlayan bazı k_i için B'nin satırlarının baş elemanları $b_{i\,k_i}$ girdileri ise, o zaman

1) *B'nin ilk ℓ tane satırı,* $\mathrm{sat}(A)$ *uzayının bir tabanı,*
2) *$\{\boldsymbol{a}_{k_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{k_\ell}\}$,* $\mathrm{süt}(A)$ *uzayının bir tabanı,*
3) *$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ denkleminin temel çözümleri,* $\mathrm{sıf}(A)$ *uzayının bir tabanı*

oluşturur.

21 Sonuç. *$\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\} \subseteq F^m$ ve*

$$A = \left[\ \boldsymbol{a}_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, \boldsymbol{a}_n\ \right]$$

olsun.

1. *$\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ kümesinin*
    - *lineer bağımsız olan*
    - *gergisi aynı olan*

    bir altkümesi elde edilmek için, $\mathrm{süt}(A)$ *uzayının bir tabanı alınabilir.*
2. *Eğer $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ kümesi zaten lineer bağımsız ise, o zaman*

    $$\left[\ A \,\middle|\, I\ \right]$$

    matrisinin sütun uzayının teoremdeki gibi edilen tabanı,

- $\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\}$ *kümesini kapsar ve*
- F^m *uzayının bir tabanıdır.*

22 Sonuç. *F^m uzayının bir altuzayının her tabanı, aynı sayıdadır.*

23 Tanım. F^m uzayının bir U altuzayının bir tabanının sayısı, U'nun **boyutudur,** ve bu boyut,

$$\mathrm{boy}(U)$$

olarak yazılabilir.

24 Sonuç. *Herhangi A matrisi için*

$$\mathrm{boy}\big(\mathrm{sat}(A)\big) = \mathrm{boy}\big(\mathrm{süt}(A)\big).$$

Eğer A'nın n tane sütunu varsa

$$\mathrm{boy}\big((\mathrm{sat}(A)\big) + \mathrm{boy}\big(\mathrm{sıf}(A)\big) = n.$$

4 Lineer Dönüşümler

25 Tanım. Bir U vektör uzayından bir V vektör uzayına giden,

$$L(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = L(\boldsymbol{u}_1) + L(\boldsymbol{u}_2),$$
$$L(t \cdot \boldsymbol{u}) = t \cdot L(\boldsymbol{u})$$

kurallarını sağlayan bir L göndermesine **lineer dönüşüm** denir. Bu durumda

1) L'nin **çekirdeği,** U'nun

$$\{\boldsymbol{u} \in U \colon L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}\}$$

altkümesidir,

2) L'nin **imgesi,** V'nin

$$\{L(\boldsymbol{u}) \colon \boldsymbol{u} \in U\}$$

altkümesidir.
Bu kümeler sırasıyla

$$\text{çek}(L), \qquad\qquad L[U]$$

olarak yazılabilir. Eğer L birebir ve $L[U] = V$ ise, o zaman L bir **izomorfizimdir.**

26 Örnek. $A \in F^{m \times n}$ ise F^n uzayından F^m uzayına giden $\boldsymbol{u} \mapsto A\boldsymbol{u}$ fonksiyonu, lineer dönüşümdir.

27 Teorem. *$L \colon U \to V$ ve lineer ise*
1. *çek(L), U'nun bir altuzayıdır,*
2. *$L[U]$, V'nun bir altuzayıdır.*

28 Teorem. *Bir F cismi üzerinde $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$, bir U uzayının altkümesi olsun. O zaman*

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \dots + x_n \cdot \boldsymbol{a}_n,$$

F^n uzayından U'ya giden lineer bir dönüşümdür. Eğer $\boldsymbol{a}_i$ vektörleri lineer bağımsız ise, o zaman verilen dönüşüm bir izomorfizimdir.

29 Sonuç. *Bir vektör uzayının her tabanı, aynı sayıdadır.*

30 Tanım. Teoremde $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$, U'nun bir tabanı ise

$$(x_1, \dots, x_n) = [x_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \dots + x_n \cdot \boldsymbol{a}_n]_B$$

olsun. Bu vektör, $x_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 + \dots + x_n \cdot \boldsymbol{a}_n$ vektörünün **koordinat vektörüdür.**

31 Teorem. *B, bir U uzayının bir tabanı; C, bir V uzayının bir tabanı; $L\colon U \to V$; ve L lineer olsun. O zaman bir A matrisi için U'nun her $\boldsymbol{u}$ elemanı için*

$$[L(\boldsymbol{u})]_C = A[\boldsymbol{u}]_B.$$

Aslında $B = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ ise

$$A = \Big[\ [L(\boldsymbol{b}_1)]_C \Big| \cdots \Big| [L(\boldsymbol{b}_n)]_C\ \Big].$$

32 Tanım. Teoremde eğer $U = V$ ve L, özdeşlik fonksiyonu ise A, B'den C'ye **geçiş matrisidir.**

33 Tanım. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in F^n$ ise

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v} = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$$

olsun.

34 Teorem. *$\boldsymbol{a} \in F^n$ ise $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}$, F^n uzayından F'ye giden lineer bir dönüşümdür. Ayrıca*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}.$$

$A \in F^{m\times n}$, $\boldsymbol{u} \in \operatorname{sıf}(A)$, ve $\boldsymbol{v} \in \operatorname{sat}(A)$ ise

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0.$$

35 Teorem. *$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$; B, $\operatorname{sıf}(A)$ uzayının bir tabanı; ve C, $\operatorname{sat}(A)$ uzayının bir tabanı ise, o zaman $B \cup C$ birleşimi, $\mathbb{R}^n$ uzayının bir tabanıdır.*

Kanıt. $B = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k\}$, $C = \{\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_\ell\}$ olsun. O zaman $k + \ell = n$, dolayısıyla $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_\ell\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu kanıtlamak yeter. Bazı x_i ve y_j için

$$x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + x_k\boldsymbol{b}_k + y_1\boldsymbol{c}_1 + \cdots +_\ell \boldsymbol{c}_\ell = \boldsymbol{0}$$

olsun. O zaman

$$x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + x_k\boldsymbol{b}_k = -y_1\boldsymbol{c}_1 - \cdots -_\ell \boldsymbol{c}_\ell.$$

Özel olarak $\boldsymbol{d} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + x_k\boldsymbol{b}_k$ ise

$$\boldsymbol{d} \in \operatorname{s\imath f}(A) \cap \operatorname{sat}(A).$$

Bu durumda $\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{d} = 0$, yani

$${d_1}^2 + \cdots + {d_n}^2 = 0.$$

Her d_i gerçel sayı olduğundan $d_i = 0$, dolayısıyla $\boldsymbol{d} = \mathbf{0}$. B lineer bağımsız olduğundan $x_i = 0$; aynı şekilde $y_j = 0$. □

36 Örnek. $\mathbb{R}$ üzerinde $A = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$ ise $\operatorname{s\imath f}(A) = \langle(-1,1)\rangle$ ve $\operatorname{sat}(A) = \langle(1,1)\rangle$, ve $\{(-1,1),(1,1)\}$ lineer bağımsızdır çünkü

$$\det\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \neq 0.$$

37 Örnek. $\mathbb{Z}_2$ üzerinde $A = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$ ise $\operatorname{s\imath f}(A) = \operatorname{sat}(A)$.

38 Örnek. $\mathbb{C}$ üzerinde $A = \begin{bmatrix}\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}$ ise $\operatorname{s\imath f}(A) = \operatorname{sat}(A)$.