Uzayların Toplamları ve Bölümleri

Lineer Cebir

David Pierce

26 Nisan 2017

Matematik Bölümü, MSGSÜ
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

Bu notlarda F bir cisimdir (örneğin $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ veya $\mathbb{Z}_p$ olabilir). U, V, ve W, F üzerinde vektör uzayıdır. Tahtaya yazılan $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri, burada $\boldsymbol{u}$ ve $\boldsymbol{v}$ biçiminde yazılıyor.

1 Toplamlar

1 Tanım. Eğer V ve W, U'nun altuzayı ise, onların **toplamı,**

$$\{\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} \colon \boldsymbol{v} \in V \ \ \& \ \ \boldsymbol{w} \in W\}$$

kümesidir. Bu küme,

$$V+W$$

olarak yazılır.

2 Örnek. F^4'te

$$\left.\begin{aligned} V &= \langle (1,1,1,0), (1,-1,1,0) \rangle, \\ W &= \langle (1,0,1,1), (1,0,1,-1) \rangle \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

ise

$$V + W = \langle (1,1,1,0), (1,-1,1,0), (1,0,1,1), (1,0,1,-1) \rangle.$$

Bu uzay,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrisinin sütun uzayıdır. Ayrıca

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_3]{-R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan

(a) F'de $2 \neq 0$ ise

$$\{(1,1,1,0), (1,-1,1,0), (1,0,1,1)\}$$

kümesi, $V + W$'nin bir tabanıdır;

(b) F'de $2 = 0$ ise

$$\{(1,1,1,0), (1,0,1,1)\}$$

kümesi, $V + W$'nin bir tabanıdır.

3 Teorem. *Eğer $V \subseteq U$ ve $W \subseteq U$ ise, o zaman $V + W$ kümesi,*

1) U'nun bir altuzayıdır,

2) U'nun V'yi ve W'yi kapsayan en küçük altuzayıdır.

Kanıt. 1. Kanıtlanacak üç koşul vardır.

(a) $V + W$ boş değildir, çünkü

$$\mathbf{0} \in V \cap W, \qquad \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

olduğundan $\mathbf{0} \in V + W$.

(b) $\boldsymbol{u}_1 \in V + W$ ve $\boldsymbol{u}_2 \in V + W$ ise V'nin bazı $\boldsymbol{v}_i$ elemanları ve W'nin bazı $\boldsymbol{w}_i$ elemanları için

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{w}_i,$$

dolayısıyla (vektörler toplaması birleşmeli ve değişmeli olduğundan)

$$\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_1) + (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}_2) = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + (\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2).$$

U ve V'nin her biri toplama altında kapalı olduğundan

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in V, \qquad \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W,$$

dolayısıyla $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \in V + W$.

(c) Benzer şekilde $\boldsymbol{u} \in V + W$ ve $t \in F$ ise V'nin bir $\boldsymbol{v}$ elemanı ve W'nin bir $\boldsymbol{w}$ elemanı için

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w},$$

dolayısıyla (skalerle çarpma dağılmalı olduğundan)

$$t\boldsymbol{u} = t(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = t\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{w}.$$

U ve V'nin her biri çarpma altında kapalı olduğundan

$$t\boldsymbol{v} \in V, \qquad\qquad t\boldsymbol{w} \in W,$$

dolayısıyla $t\boldsymbol{u} \in V + W$.

2. U', U'nun V'yi ve W'yi kapsayan bir altuzayı olsun. Eğer $\boldsymbol{u} \in V + W$ ise, o zaman V'nin bir $\boldsymbol{v}$ elemanı ve W'nin bir $\boldsymbol{w}$ elemanı için

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{v} \in U', \qquad \boldsymbol{w} \in U', \qquad \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in U',$$

dolayısıyla $\boldsymbol{u} \in U'$. □

4 Sonuç. *$C \subseteq U$ ve $D \subseteq U$ ise*

$$\langle C\rangle + \langle D\rangle = \langle C \cup D\rangle.$$

Kanıt. Alıştırma. □

5 Teorem. *$V \times W$ kartezyan çarpımı,*

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}_1) + (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_2) = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2),$$
$$t(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (t\boldsymbol{v}, t\boldsymbol{w})$$

kurallarıyla vektör uzayı oluyor.

Kanıt. Alıştırma. □

6 Tanım. Vektör uzayı olarak anlaşılınca $V \times W$ çarpımı

$$V \oplus W$$

olarak yazılır ve ona V ve W'nin **direkt toplamı** denir.

7 Örnek. $F^2 = F \oplus F$.

8 Örnek. $F^{k+m} = F^k \oplus F^m$.

9 Örnek. $F^n = \underbrace{F \oplus \cdots \oplus F}_{n}$.

10 Örnek. $\mathbb{Z}$ cisim değildir, çünkü çarpmaya göre sadece 1 ve -1'in tersleri vardır; ama $\underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{n}$ toplamları oluşturulabilir.

11 Tanım. U'dan V'ye giden,

$$\begin{aligned} h(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) &= h(\boldsymbol{u}_1) + h(\boldsymbol{u}_2), \\ h(t\boldsymbol{u}) &= t \cdot h(\boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

kurallarını sağlayan bir h göndermesine **doğrusal dönüşüm** denir. Eğer h birebir ve V'yi örten ise, o zaman h altında U ve V **izomorftur** ve

$$U \cong V$$

yazılır. Bazen izomorfluk, eşitlik olarak anlaşılır.

12 Teorem. *Eğer $V \subseteq U$ ve $W \subseteq U$ ise, o zaman $V \oplus W$'den $V + W$'ye giden*

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$$

göndermesi, $V + W$'yi örten bir h doğrusal dönüşümüdür, ve bu dönüşüm için aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

1. *h birebirdir.*
2. *$V \cap W = \{\boldsymbol{0}\}$.*
3. *$h(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0}$ denkleminin sadece aşikâr $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ çözümü vardır.*

4. *Eğer B, V'nin bir tabanı ise ve C, W'nin bir tabanı ise, o zaman $B \cup C$, $V + W$'nin bir tabanıdır.*

5. *Eğer $B \subseteq V$, $C \subseteq W$, ve her biri doğrusal bağımsız ise, o zaman $B \cup C$ de doğrusal bağımsızdır.*

Kanıt. Alıştırma. $\square$

13 Tanım. Teoremde h birebir ise $V+W$ toplamı, V ve W'nin **iç direkt toplamıdır** ve $V \oplus W$ olarak yazılabilir.

14 Örnek. $(*)$ tanımları altında

$$V + W = V \oplus \langle(1, 0, 1, 1)\rangle;$$

F'de $2 = 0$ ise $V + W = V \oplus W$.

2 Bölümler

15 Örnek. $n \in \mathbb{N}$ ise

$$n\mathbb{Z} = \{nx \colon x \in \mathbb{Z}\}$$

tanımını yaparız. Bu durumda $a \in \mathbb{Z}$ ise

$$[a] = \{a + x \colon x \in \mathbb{Z}\}$$

olsun. O halde

$$\mathbb{Z}_n = \{[x] \colon x \in \mathbb{Z}\},$$

ve bu küme için

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

ifadesi kullanılabilir. Bu kümede toplama ve çarpma

$$[a] + [b] = [a + b],$$
$$[a] \cdot [b] = [ab]$$

eşitlikleriyle tanımlanabilir, çünkü

$$[a] = [b] \iff a - b \in n\mathbb{Z},$$

dolayısıyla

$$[a_1] = [a_2] \;\;\&\;\; [b_1] = [b_2]$$

ise

$$a_1 - a_2 \in n\mathbb{Z} \;\;\&\;\; b_1 - b_2 \in n\mathbb{Z},$$

ve sonuç olarak

$$\begin{gathered}(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \in n\mathbb{Z},\\ (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) \in n\mathbb{Z},\\ [a_1 + b_1] = [a_2 + b_2],\end{gathered}$$

ve ayrıca

$$\begin{gathered}(a_1 - a_2) \cdot b_1 + a_2 \cdot (b_1 - b_2) \in n\mathbb{Z},\\ a_1 b_1 - a_2 b_2 \in n\mathbb{Z},\\ [a_1 b_1] = [a_2 b_2].\end{gathered}$$

Şimdi

$$[x]^1 = [x], \qquad\qquad [x]^{k+1} = [x]^k \cdot [x]$$

özyinelemeli tanımıyla $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \times \mathbb{N}$ kartezyan çarpımından $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bölümñe giden

$$([x], y) \mapsto [x]^y$$

göndermesi tanımlanabilir. Ayrıca tümevarımla

$$[x]^y = [x^y].$$

Bununla beraber
$$[x]^{[y]} = [x^y]$$
kuralıyla $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bölümünda 2-konumlu
$$([x],[y]) \mapsto [x]^{[y]}$$
işlemi tanımlanamaz çünkü, örneğin
$$1 \equiv 4, \qquad 2^1 \equiv 2, \qquad 2^4 \equiv 1 \pmod 3,$$
dolayısıyla $n = 3$ durumunda
$$[1] = [4], \qquad [2^1] \neq [2^4].$$
Kısaca $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bölümünde $([x],[y]) \mapsto [x]^{[y]}$ işlemi **iyitanımlı** değildir: böyle bir işlem yoktur.

16 Tanım. Eğer $V \subseteq U$ ve $\boldsymbol{a} \in U$ ise
$$\boldsymbol{a} + V = \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \colon v \in V\}.$$

17 Tanım. Eğer $V \subseteq U$ ise
$$U/V = \{\boldsymbol{u} + V \colon \boldsymbol{u} \in U\}.$$

18 Teorem. *$V \subseteq U$ ise*
$$(\boldsymbol{u}_1 + V) + (\boldsymbol{u}_2 + V) = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) + V,$$
$$t(\boldsymbol{u}_1 + V) = t\boldsymbol{u}_1 + V$$
kurallarıyla U/V bölümü, iyitanımlanmış bir vektör uzayıdır.

Kanıt. Alıştırma. □

19 Örnek. $(*)$ tanımları altında
$$(V+W)/V \cong \langle (1,0,1,1)\rangle;$$
F'de $2=0$ ise $(V+W)/V \cong W$.

20 Örnek. Eğer
$$U = \langle (1,1,1,0),(1,-1,1,0),(1,0,1,1),(1,0,1,-1)\rangle$$
ise
$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&0&0&0\\1&-1&0&0&0&1&0&0\\1&1&1&1&0&0&1&0\\0&0&1&-1&0&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_3]{-R_1+R_2}$$
$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&-2&-1&-1&-1&1&0&0\\0&0&0&0&-1&0&1&0\\0&0&1&-1&0&0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4}$$
$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&-2&-1&-1&-1&1&0&0\\0&0&1&-1&0&0&0&1\\0&0&0&0&-1&0&1&0\end{pmatrix}$$
olduğundan
$$F^4/V \cong \langle (1,0,0,0)\rangle.$$

21 Teorem. *Eğer $B\cap C=\varnothing$ ve $B\cup C$ doğrusal bağımsız ise*
$$\langle B\cup C\rangle/\langle B\rangle \cong \langle C\rangle.$$

Kanıt. $B=\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_\ell\}$ ve $C=\{\boldsymbol{c}_1,\dots,\boldsymbol{c}_m\}$ olsun. O zaman $\langle B\cup C\rangle$ gergisinin her $\boldsymbol{a}$ elemanı, tek bir şekilde, $u_i\in F$ ve $v_j\in F$ olmak üzere bir
$$u_1\boldsymbol{b}_1+\dots+u_\ell\boldsymbol{b}_\ell+v_1\boldsymbol{c}_1+\dots+v_m\boldsymbol{c}_m$$

doğrusal bileşimi olarak yazılabilir. Bu durumda

$$h(\boldsymbol{a}) = v_1\boldsymbol{c}_1 + \cdots + v_m\boldsymbol{c}_m$$

eşitliği ile $\langle B \cup C \rangle$ gergisinden $\langle C \rangle$ gergisine giden bir h doğrusal dönüşümü tanımlanabilir. Şimdi

$$\boldsymbol{a}' = u_1'\boldsymbol{b}_1 + \cdots + u_\ell'\boldsymbol{b}_\ell + v_1'\boldsymbol{c}_1 + \cdots + v_m'\boldsymbol{c}_m$$

olsun. Eğer

$$\boldsymbol{a}' + \langle B \rangle = \boldsymbol{a} + \langle B \rangle \tag{$\dagger$}$$

ise, o zaman $\boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a} \in \langle B \rangle$, yani

$$\begin{aligned}(u_1' - u_1)\boldsymbol{b}_1 + \cdots + (u_\ell' - u_\ell)\boldsymbol{b}_\ell& \\ + (v_1' - v_1)\boldsymbol{c}_1 + \cdots + (v_m' - v_m)\boldsymbol{c}_m &\in \langle B \rangle.\end{aligned}$$

Bu durumda $B \cup C$ doğrusal bağımsız olduğundan

$$v_1' - v_1 = \ldots = v_m' - v_m = 0,$$

dolayısıyla $v_1' = v_1, \ldots, v_m' = v_m$, ve sonuç olarak

$$h(\boldsymbol{a}') = h(\boldsymbol{a}). \tag{$\ddagger$}$$

Bu şekilde $\langle B \cup C \rangle / \langle B \rangle$ bölümünden $\langle C \rangle$ gergisine giden

$$\tilde{h}(\boldsymbol{u} + \langle B \rangle) = h(\boldsymbol{u})$$

eşitliği ile iyitanımlanmış doğrusal dönüşümü vardır. Benzer şekilde ($\ddagger$) eşitliği doğru ise ($\dagger$) eşitliği de doğrudur, dolayısıyla $\tilde{h}$, birebirdir. Son olarak $\tilde{h}$ dönüşümünün $\langle C \rangle$ gergisini örten olduğu apaçıktır. $\square$