Lineer Cebir (MAT 114)

Final Sınavı

David Pierce, MSGSÜ

7 Haziran 2017

Lütfen:
1. Çözüm yöntemlerinizi düşünerek seçin.
2. Çözümlerinizi net bir şekilde yazın.
3. Mümkünse cevaplarınızı kontrol edin.

İyi çalışmalar dilerim!

Problem 1 (9 puan)**.** *$P_n = \{f \in \mathbb{R}[x] \colon \operatorname{der}(f) < n\}$ olmak üzere Φ, P_3 uzayından P_4/P_1 bölüm uzayına giden*

$$\Phi(f) = \int f$$

koşulunu sağlayan lineer dönüşümü olsun. Örneğin $\Phi(x^2) = \frac{1}{3}x^3 + P_1$.
- *$\{1, x, x^2\}$, P_3 uzayının bir B tabanıdır, ve*
- *$\{x + P_1, x^2 + P_1, x^3 + P_1\}$, P_4/P_1 bölüm uzayının bir C tabanıdır.*

(a) $[\Phi(f)]_C = A[f]_B$ koşulunu sağlayan A matrisini bulun.

(b) P_3 için $[\Phi(f)]_C = [f]_D$ koşulunu sağlayan D tabanını bulun.

Çözüm. (a) $A = \left[\ \left[\int 1\right]_C \,\middle|\, \left[\int x\right]_C \,\middle|\, \left[\int x^2\right]_C\ \right]$

$$= \left[\ [x + P_1]_C \,\middle|\, \left[\tfrac{1}{2}x^2 + P_1\right]_C \,\middle|\, \left[\tfrac{1}{3}x^3 + P_1\right]_C\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

(b) Bazı g_i için $D = \{g_1, g_2, g_3\}$, ve $I = \left[\ \left[\int g_1\right]_C \,\middle|\, \left[\int g_2\right]_C \,\middle|\, \left[\int g_3\right]_C\ \right]$, dolayısıyla

$$\int g_1 = x + P_1, \qquad \int g_2 = x^2 + P_1, \qquad \int g_3 = x^3 + P_1,$$

ve sonuç olarak $D = \{1, 2x, 3x^2\}$.

Not. $\mathcal{B}$, sonlu-boyutlu bir V vektör uzayının bir tabanı olsun; $\mathcal{C}$, sonlu-boyutlu bir W vektör uzayının bir tabanı olsun; ve L, V'den W'ye giden doğrusal bir dönüşümü olsun. Koç–Esin kitabındaki Teorem 7.2.1'e göre ve 5 Mayıs 2017 tarihli "Vektor Uzayları" notlarımdaki 31 Teorem'e göre, bir A matrisi için, V'nin her $\boldsymbol{v}$ elemanı için

$$[L(\boldsymbol{v})]_{\mathcal{C}} = A[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Ayrıca $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ ise $A = \left[\ [L(\boldsymbol{v}_1)]_{\mathcal{C}} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, [L(\boldsymbol{v}_n)]_{\mathcal{C}}\ \right]$.

Problem 2 (12 puan). $\mathbb{R}$ *üzerinde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \left[\ \boldsymbol{e}_1 \,\middle|\, \boldsymbol{e}_2 \,\middle|\, \boldsymbol{e}_3 \,\middle|\, \boldsymbol{e}_4\ \right] = I$$

olsun.

(a) *Hangi k*

$$\mathbb{R}^4 = \langle \text{süt}(A) \cup \{\boldsymbol{e}_k\} \rangle$$

koşulunu sağlar?

(b) *A'nın sütun uzayı—yani* süt(A)*—için bir taban bulun.*

(c) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6 \colon A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ *uzayının bir tabanı bulun.*

(d) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1$ *sistemini çözün.*

Not. Tanıma göre $\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Problemin (a) şıkkında hangi k için $\left[\ A \,\middle|\, \boldsymbol{e}_k\ \right]$ matrisinin sütun uzayının $\mathbb{R}^4$ olduğunu öğrenmek isteriz. Bunun için $\left[\ A \,\middle|\, I\ \right]$ matrisini satırca indirgeyebiliriz. Aslında A'nın son sütununun $\boldsymbol{e}_4$ olduğundan $\left[\ A \,\middle|\, \boldsymbol{e}_1 \,\middle|\, \boldsymbol{e}_2 \,\middle|\, \boldsymbol{e}_3\ \right]$ matrisini satırca indirgemek yeter. Bu indirgemeyi diğer şıklar için kullanabiliriz.

Çözüm. $\left[\ A \,\middle|\, \boldsymbol{e}_1 \,\middle|\, \boldsymbol{e}_2 \,\middle|\, \boldsymbol{e}_3\ \right] =$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & -3 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{2R_1+R_3 \\ 3R_1+R_4}]{-2R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2+R_4]{R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Yukarıdaki indirgemeye göre $\left[\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{e}_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ dolayısıyla $k \neq 1$, ama $\left[\begin{array}{c|c} A & \boldsymbol{e}_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ dolayısıyla $k = 2$ olabilir. Benzer şekilde $k = 3$ olabilir, ama $k \neq 4$. Kısaca $\boxed{k \in \{2, 3\}.}$

(b) $\{(1, 2, -2, -3), (0, -1, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$, yani $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(c) Homojen sistemin serbest değişkenleri x_2, x_3, ve x_5 olduğundan çözüm uzayının tabanı $\{(*, 1, 0, *, 0, *), (*, 0, 1, *, 0, *), (*, 0, 0, *, 1, *)\}$ biçiminde olur ve

$$\{(2, 1, 0, 0, 0, 0), (-1, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, -1, 1, 0)\}$$

olur. Bu cevap kontrol edilebilir: $A \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) Çözüm kümesi $(1, 0, 0, 2, 0, 1) + \langle (2, 1, 0, 0, 0, 0), (-1, 0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, -1, 1, 0) \rangle$ kümesi, yani çözümler $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörleridir. Bu cevap da kontrol edilebilir: $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Problem 3 (6 puan)**.** *Tekrar*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\text{süt}(A) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \colon C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ *koşulunu sağlayan bir C matrisi bulun.*

Çözüm.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 2 & -1 & 0 & b \\ -2 & 1 & 0 & c \\ -3 & 1 & 1 & d \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 2 & -1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b + c \\ -3 & 1 & 1 & d \end{array}\right]$$

dolayısıyla

$$\text{süt}(A) = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \colon b + c = 0\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \colon \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

Not. Bunun gibi problemler, Koç–Esin kitabındaki Örnek 4.3.1, 4.3.2, ve 4.3.3'te çözülür.

Problem 4 (9 puan). *Ya iki-elemanlı $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde, ya da $\mathbb{R}$ üzerinde (siz birini seçin),*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. A'nın tersini ve ek matrisini bulun.

Çözüm. $\mathbb{R}$ üzerinde:

$$\left[\ A \mid I\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_2+R_4]{-R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_1+R_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_4+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_3+R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kontrol edelim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ayrıca (A'nın indirgenmesinden) $\det A = -1$, dolayısıyla

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{Ek} A = \det A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbb{Z}_2$ üzerinde

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Ek} A.$$

Not. $\mathbb{Z}_2$ üzerinde bu problem biraz daha kolaydır çünkü bu durumda $-1 = 1$. 24 Mart 2017 tarihli "Ekmatris ve ters" notumdaki gibi A'nın tersinin yerine A'nın ek matrisi önce hesaplanabilir. Herhangi durumda hata yapmadan hesaplama zor olabilir, ama cevaplar kolaylıkla kontrol edilebilir.