Lineer Cebir (MAT 114)

Sınav 2

David Pierce, MSGSÜ

12 Mayıs 2017

Çözüm yöntemlerinizi düşünerek seçin. Çözümlerinizi net bir şekilde yazın. Mümkünse cevaplarınızı kontrol edin. İyi çalışmalar dilerim!

Problem 1. $V = \{x \in \mathbb{R} \colon x > 0\}$ *olsun. Bildiğimiz gibi toplamanın* $(x, y) \mapsto xy$*, skaler çarpmanın* $(t, x) \mapsto x^t$ *olduğu zaman* V *vektör uzayı olur.* $\mathbb{R}^2$ *uzayından* V*'ye giden bir* L *fonksiyonu*

$$L(x, y) = 2^{x+y} \cdot 4^{x-y}$$

ile tanımlansın, ve

$$E = \{(1, 0), (0, 1)\}, \qquad\qquad B = \{2\}$$

ile $\mathbb{R}^2$ *uzayının* E *tabanı ve* V*'nin* B *tabanı tanımlansın.*

(a) L*'nin lineer olduğunu gösterin.*

(b) L*'nin* E *ve* B*'ye göre matrisini bulun, yani*

$$\big[L(x, y)\big]_B = A\big[(x, y)\big]_E$$

eşitliğini sağlayan A *matrisini bulun.*

Çözüm. (a) Hesaplarız:

$$\begin{aligned} L\big((x, y) + (s, t)\big) = L(x + s, y + t) &= 2^{x+s+y+t} \cdot 4^{x+s-y-t} \\ &= 2^{x+y} \cdot 4^{x-y} \cdot 2^{s+t} \cdot 4^{s-t} = L(x, y) \cdot L(s, t), \end{aligned}$$

$$L\big(t(x, y)\big) = L(tx, ty) = 2^{tx+ty} \cdot 4^{tx-ty} = 2^{x+y^t} \cdot 4^{x-y^t} = L(x, y)^t.$$

(b) $A = \big[\big[L(1, 0)\big]_B \quad \big[L(0, 1)\big]_B\big] = \big[\big[2^3\big]_B \quad \big[2^{-1}\big]_B\big] = \begin{bmatrix}3 & -1\end{bmatrix}.$

Not.

$$L(x, y) = 2^{x+y} \cdot 2^{2x-2y} = 2^{3x-y}$$

kuralı da kullanılabilir. Problemde $x \mapsto 2^x$, $\mathbb{R}$'den V'ye giden izomorfizimdir. Ayrıca $(x, y) \mapsto 3x - y$, $\mathbb{R}^2$ uzayından $\mathbb{R}$'ye giden lineer dönüşümdür, dolayısıyla L de lineer dönüşümdür.

Problem 2. *$A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,6} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{4\,1} & \cdots & a_{4\,6} \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 17 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ile satırca denk olsun. A'nın sütunları ve satırları için*

$$\boldsymbol{b}_j = (a_{1\,j}, \dots, a_{4\,j}), \qquad \boldsymbol{c}_i = (a_{i\,1}, \dots, a_{i\,6})$$

kısaltmaları kullanılabilir. Sırasıyla A'nın

(a) satır uzayı,

(b) sütun uzayı, ve

(c) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6 \colon A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ sıfır uzayı

için bir taban bulun.

Çözüm. (a) $\{(0,1,17,0,3,-1),(0,0,0,1,5,4)\}$

(b) $\{\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_4\}$

(c) $\{(1,0,0,0,0,0),(0,-17,1,0,0,0),(0,-3,0,-5,1,0),(0,1,0,-4,0,1)\}$

Not. (c) şıkkında

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0x_1 & + & 1x_2 & + & 17x_3 & + & 0x_4 & + & 3x_5 & + & -1x_6 & = & 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 1x_4 & + & 5x_5 & + & 4x_6 & = & 0 \end{array}$$

homojen sisteminin çözüm kümesinin bir tabanı aranıyor. Her serbest değişken için tabanın bir elemanı vardır. Serbest değişkenler x_1, x_3, x_5, ve x_6. Cevap kontrol edilebilir.

Problem 3. $\mathbb{R}^4$ *uzayında*

$$\boldsymbol{b}_1 = (2,2,2,-4), \qquad \boldsymbol{c}_1 = (1,5,5,-10),$$
$$\boldsymbol{b}_2 = (-1,0,0,0), \qquad \boldsymbol{c}_2 = (0,2,0,0), \qquad B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\},$$
$$\boldsymbol{b}_3 = (3,2,2,-4), \qquad \boldsymbol{c}_3 = (5,6,9,-18), \qquad C = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3\}$$

olsun. Aşağıdaki vektör uzaylarının her biri için bir taban bulun.

(a) $\langle B\rangle \oplus \langle C\rangle$

(b) $\langle B\rangle + \langle C\rangle$

(c) $\langle B\cup C\rangle / \langle B\rangle$

(d) $\mathbb{R}^n / \langle B\cup C\rangle$

Çözüm. Önce hesaplarız:

$$\left[\ \boldsymbol{c}_1 \mid \boldsymbol{c}_2 \mid \boldsymbol{c}_3\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 9 \\ -10 & 0 & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_3+R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-5R_1+R_3]{-5R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -19 \\ 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\ \boldsymbol{b}_1 \mid \boldsymbol{b}_2 \mid \boldsymbol{b}_3 \mid \boldsymbol{c}_1 \mid \boldsymbol{c}_2 \mid \boldsymbol{c}_3 \mid I\ \right] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 5 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 5 & 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & -10 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[2R_1+R_4]{\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 0 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -8 & 0 & -8 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[2R_2+R_4]{-R_2+R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_3+R_4} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$, B'nin gergisinin bir tabanı ve $\{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3\}$, C'nin gergisinin bir tabanı olduğundan

$$\{(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{0}), (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}_1), (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}_2), (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}_3)\},$$

$\langle B\rangle \oplus \langle C\rangle$ direkt toplamının bir tabanıdır.

(b) $\langle B\rangle + \langle C\rangle$ toplamı, $\left[\ \boldsymbol{b}_1 \mid \boldsymbol{b}_2 \mid \boldsymbol{b}_3 \mid \boldsymbol{c}_1 \mid \boldsymbol{c}_2 \mid \boldsymbol{c}_3\ \right]$ matrisinin sütun uzayı olduğundan

$$\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{c}_2\},$$

bir tabanıdır.

(c) $\{\boldsymbol{c}_2 + \langle B\rangle\}$

(d) $\{(0,0,1,0) + \langle B\cup C\rangle\}$

Problem 4. *Aşağıda tanımlanan kümelerin biri, $\mathbb{R}^4$ uzayının bir altuzayıdır.*

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{s(1,0,1,1) + (0,1,1,-1) \colon s \in \mathbb{R}\},\\
S_2 &= \{s(1,0,1,1) + t(0,1,1,-1) \colon (s,t) \in \mathbb{R}^2\},\\
S_3 &= \{s(1,0,1,1) + t^2(0,1,1,-1) \colon (s,t) \in \mathbb{R}^2\},\\
S_4 &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \colon {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 = 0\},\\
S_5 &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}.
\end{aligned}$$

Altuzay, V olsun.

(a) Hangi k için $V = S_k$?

(b) V hangi matrisin sıfır uzayıdır? Yani, hangi A matrisi için $V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \colon A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$?

Çözüm. (a) $k = 2$ veya 4.

(b) $V = S_2$ ise

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & -1 & x_4 \end{bmatrix} \xrightarrow[-R_1+R_4]{-R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & -x_1 + x_3 \\ 0 & -1 & -x_1 + x_4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2+R_4]{-R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & -x_1 - x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_2 + x_4 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
V &= \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \colon -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \ \& \ -x_1 + x_2 + x_4 = 0\}\\
&= \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \colon \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\right\},
\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$V = S_4 = \{\boldsymbol{0}\}$ ise $A = I$ olabilir.