Ordinal Analiz

Aksiyomatik Kümeler Kuramı Dersi

David Pierce

24 Ocak 2020 taslağı

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul
`dpierce@msgsu.edu.tr`
`mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/`
`polytropy.com`

İçindekiler

1 Harfler ve Aksiyomlar 5
1.1 Harfler 5
1.2 Aksiyomlar 7

2 Mantık 9
2.1 Kümeler ve Sınıflar 9
2.2 Formüller 10
2.3 Doğruluk ve yanlışlık 14
2.4 Kısaltmalar 14
2.4.1 Mantık 15
2.4.2 Ayraçlar 15
2.4.3 Formüller 16
2.4.4 Sınıflar 17
2.5 Eşitlik 18

3 Doğal sayılar 20
3.1 Tümevarım 20
3.2 Özyineleme 26

4 Ordinal Sayılar 30
4.1 Ordinaller 30
4.2 Tümevarım ve Özyineleme 34
4.3 Normal işlemler 36
4.4 Süreklilik 39

5 Ordinal toplama 41
5.1 Tanım ve özellikler 41
5.2 Hesaplamalar 46

6 Ordinal çarpma 50
6.1 Tanım ve özellikler 50
6.2 Hesaplamalar 54

7 Ordinal kuvvet alma 58
7.1 Tanım ve özellikler 58
7.2 Hesaplamalar 60

8 Kardinaller 62
8.1 Eşlemeler 62
8.2 Kardinaller 63
8.3 Kardinal Toplama ve Çarpma 64
8.4 Sayılamaz kümeler 69
8.5 Seçme 71

9 Kofinallik 73
9.1 Tanım ve özellikler 73
9.2 Hesaplamalar 76

Şekil Listesi

1 Özyineleme 28

2 $\eta = \omega + \xi$ denkleminin grafiği 43
3 $\eta = \xi + \omega$ denkleminin grafiği 47

4 $\eta = \omega \cdot \xi$ denkleminin grafiği 51
5 $\eta = \xi \cdot \omega$ denkleminin grafiği 56

6 $\eta = \omega^{\xi}$ denkleminin grafiği 59

1 Harfler ve Aksiyomlar

1.1 Harfler

Simge olarak kullanılırken harfler aşağıdaki anlamlara gelir.

Küçük Latin harfleri

a, b, c, d, e kümeler (sayfa 10)

f, g, h tanım kümesi olan göndermeler (sayfa 27)

i, j doğal sayı değişkenleri (sayfa 22)

k, ℓ, m, n doğal sayılar (sayfa 21)

s, t terimler (sayfa 11)

u, v, w, x, y, z küme değişkenleri (sayfa 10)

Büyük Latin harfleri

A, B, C, D kümeler (sayfa 22)

X, Y, Z küme değişkenleri (sayfa 21)

Kıvırcık Latin harfleri

$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ kümeler (sayfa 27)

$\mathscr{P}(A)$ $\{X\colon X \subseteq A\}$ (sayfa 17 ve 67)

$\mathscr{P}_\omega(A)$ $\{X \in \mathscr{P}(A)\colon \operatorname{kard}(X) < \omega\}$ (sayfa 67)

Düz büyük Latin harfleri

A, B	ifadeler (sayfa 12)

Büyük siyah Latin harfleri

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$	sınıflar (sayfa 17)
$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$	göndermeler (sayfa 26)

Dikey büyük siyah Latin harfleri

$\mathbf{KN}$	kardinaller sınıfı (sayfa 63)
$\mathbf{ON}$	ordinaller sınıfı (sayfa 30)
$\mathbf{V}$	evrensel sınıf (sayfa 17)

Yunan harfleri

α, β, γ, δ, ε	ordinaller (sayfa 31)
ζ, η	ordinal değişkenler (sayfa 31)
θ	ordinal (sayfa 35)
κ, λ, μ, ν	kardinaller (sayfa 64 ve 71)
ξ	ordinal değişken (sayfa 31)
π	formül (sayfa 12)
ρ, σ, τ	cümleler (sayfa 14)
φ, χ, ψ	formüller (sayfa 9, 12, 11)

Dikey Yunan harfi

$\upvarepsilon_0$	$\sup\{\upomega, \upomega^{\upomega}, \upomega^{\upomega^{\upomega}}, \dots\}$ (sayfa 58)
$\upomega$	doğal sayıları kümesi (sayfa 21)

Dikey küçük Latin harfleri

kard	kardinal (sayfa 63)
kf	kofinallik (sayfa 73)

maks	en büyük (sayfa 66)
min	en küçük (sayfa 31)
sup	en küçük üstsınır (sayfa 33)

Dikey büyük Latin harfleri

GKH	Genelleştirilmiş Kontinü Hipotezi (sayfa 72)
KH	Kontinü Hipotezi (sayfa 72)
ZF	Zermelo–Fraenkel Aksiyomları (sayfa 71)
ZFC	Seçim Aksiyomu ile ZF (sayfa 71)

“Tahta siyahı” harfleri

$\mathbb{N}$	sayma sayıları kümesi (sayfa 21)
$\mathbb{Q}$	kesirli sayılar kümesi (sayfa 29)
$\mathbb{R}$	gerçel sayılar kümesi (sayfa 29)
$\mathbb{Z}$	tamsayılar kümesi (sayfa 29)

Harflerden türeyen simgeler

$\forall$	her . . . için (*for **A**ll*; sayfa 15)
$\exists$	bazı . . . için (*there **E**xists*; sayfa 10)
$\in$	(“$a \in B$” = “a ἐστὶ B”; sayfa 10)
$\cup$, $\bigcup$	bileşim (***U**nion*; sayfa 17 ve 17)
$\vee$	veya (Latince **V**EL; sayfa 15)

1.2 Aksiyomlar

Kümeler için on tane aksiyom vardır.

Eşitlik (sayfa 18): eşit kümeler, aynı kümelerin elemanlarıdır.

Ayırma (sayfa 20): her küme her altsınıfı, bir kümedir.

Boş Küme (sayfa 20): boş sınıf, bir kümedir.

Bitiştirme (sayfa 21): bir kümeden bir elemanı daha olan sınıf, bir kümedir.

Sonsuzluk (sayfa 21): doğal sayılar sınıfı, bir kümedir.

Yerleştirme (sayfa 27): bir gönderme altında bir kümenin imgesi, bir kümedir.

Bileşim (sayfa 33): bir kümenin bileşimi, bir kümedir.

Kuvvet Kümesi (sayfa 69): bir kümenin altkümelerinin oluşturduğu sınıf, bir kümedir.

Temel (kullanılmamış): her boş olmayan kümenin, kendisinden ayrık bir elemanı vardır.

Seçim (sayfa 71): her küme iyisıralanabilir.

Yukarıdaki ilk dokuz aksiyomları, **Zermelo–Fraenkel Aksiyomlarıdır,** kısaca ZF. Hep beraber, aksiyomlara ZFC denir.

2 Mantık

2.1 Kümeler ve Sınıflar

- Öklid'in *Öğeler*'inde ortak kavramları kullanarak postulatlardan diğer önermeleri kanıtlarız.
- Kümeler kuramında mantığın kurallarını kullanarak aksiyomlardan diğer teoremleri kanıtlarız.

Kümeler kuramında her teorem, *serbest değişkeni olmayan bir formüldür,* kısaca bir **cümledir** (*sentence*).

Tek serbest değişkeni olan bir formülde, formülün serbest değişkeninin *serbest geçişlerinin* yerine bir *kümenin* adı konulabilir. Eğer formül φ ve küme a ise, o zaman meydana gelen cümle

$$\boxed{\varphi(a)}$$

olur. ya *doğrudur* ya da *yanlıştır.* Eğer doğru ise, o zaman a kümesi, φ formülünü **sağlar** (*satisfies*).

Bir formülü sağlayan kümeler, bir **sınıf** oluşturur. Oluşturan kümeler, sınıfın **elemanlarıdır** (*elements*), ve formül, sınıfı **tanımlar** (*defines*). Eğer formül φ ve tek serbest değişkeni x ise, o zaman

$$\boxed{\{x\colon \varphi\}}$$

sınıfı tanımlanır.

Kümelerin de elemanları vardır, ve her biri bir kümedir. Eğer bir a kümesi, bir b kümesinin bir elemanı ise, o zaman

$$\boxed{a \in b}$$

cümlesi yazılır. Aksi durumda

$$\boxed{a \notin b}$$

yazılır.

Teorem 1. *Her küme, bir sınıftır.*

Kanıt. Her a kümesi, $\{x\colon x \in a\}$ sınıfıdır. □

Teorem 2 (Russell Paradoksu)**.** *Bazı sınıf, küme değildir.*

Kanıt. Her a kümesi için aşağıdaki iki koşul denktir.

1. a, $\{x\colon x \notin x\}$ sınıfının elemanıdır.
2. a, a kümesinin elemanı değildir (yani $a \notin a$).

Öyleyse her küme, $\{x\colon x \notin x\}$ sınıfından farklıdır. □

2.2 Formüller

Formüllerde kullanacağımız simgeler ya *mantıksaldır* ya da *mantıksal olmayandır.*

- **Mantıksal** (*logical*) simgeler:
  - **terimler** (*terms*):
    - **sabitler** (*constants*): $\boxed{a, b, c, \dots}$
    - **değişkenler** (*variables*): $\boxed{z, y, x, \dots}$
  - **bağlayıcılar** (*connectives*):
    - **iki-konumlu** (*binary*) bir bağlayıcı: $\boxed{\land}$
    - **tek-konumlu** (*singulary*) bir bağlayıcı: $\boxed{\neg}$
  - bir **niceleyici** (*quantifier*): $\boxed{\exists}$

  - **ayraçlar** (*parentheses, brackets*):
    - sol: $\boxed{(}$
    - sağ: $\boxed{)}$
- **mantıksal olmayan** (*non-logical*) bir simge:
  - iki-konumlu bir **yüklem** (*predicate*): $\boxed{\in}$

Formüller (*formulas*) için tanım *özyinelidir.* Aslında formüllerin dört tane türü vardır.

1. t ve s terim olmak üzere

$$\boxed{t \in s}$$

bir **içermedir** (*containment*).

2. φ bir formül olmak üzere

$$\boxed{\neg\varphi}$$

bir **değillemedir** (*negation*).

3. φ ve ψ formül olmak üzere

$$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$$

bir **tümel evetlemedir** (*conjunction*).

4. φ bir formül, x bir değişken olmak üzere

$$\boxed{\exists x\ \varphi}$$

bir **örneklemedir** (*instantiation*).

Her içerme, her değilleme, her tümel evetleme, ve her örnekleme, bir formüldür. Ayrıca

- φ, hem $\neg\varphi$ değillemesinin hem de $\exists x\ \varphi$ örneklemesinin tek **bileşenidir** (*component*);
- φ ve ψ, $(\varphi \wedge \psi)$ örneklemesinin bileşenleridir.

Lemma 1. *Eğer simgeler, bir formülün sonuna eklenirse veya sonundan kaldırılırsa, o zaman yeni bir formül elde edilmez.*

Kanıt. Formüllerin tanımının sağladığı tümevarım yöntemini kullanacağız.

1. Bir içerme için iddiamız doğrudur, çünkü içermeler ve sadece içermeler, terim ile başlar, ve bu formüllerin her birinin uzunluğu üçtür.

2. Tümevarım hipotezi olarak iddiamızın bir φ formülü için doğru olması kabul edilsin. Mümkünse simgeler $\neg\varphi$ formülünün sonuna ekleyerek veya sonundan kaldırarak yeni bir formül elde edilsin. o zaman ortaya çıkan formül, bir A ifadesi için, $\neg\mathsf{A}$ biçimindedir. Bu durumda A, bir ψ formülü olmalıdır, ve simgeler φ'nin sonuna ekleyerek veya sonundan kaldırarak ψ elde edilir, ki bu hipoteze göre imkânsızdır. O zaman iddiamız $\neg\varphi$ için doğrudur.

3. Tümevarım hipotezi olarak iddiamızın bir φ formülü ve bir ψ formülü için doğru olması kabul edilsin. Mümkünse simgeler $(\varphi\wedge\psi)$ formülünün sonuna ekleyerek veya sonundan kaldırarak yeni bir formül elde edilsin. O zaman ortaya çıkan formül, bir A ifadesi için, $(\mathsf{A}$ biçimindedir. Bu durumda A, bir χ ve bir π formülü için $\chi \wedge \pi)$ olmalıdır. Bu durumda χ, φ olmalıdır, çünkü aksi durumda simgeler φ'nin sonuna ekleyerek veya sonundan kaldırarak χ elde edilir, ve hipoteze göre bu imkânsızdır. Şimdi aynı şekilde π, ψ olmalıdır. O zaman iddiamız $(\varphi \wedge \psi)$ için doğrudur.

4. Benzer şekilde iddiamızın bir φ formülü için doğru olması kabul edilirse, o zaman $\exists x\ \varphi$ için de doğrudur.

Böylece tümevarımdan her durumda iddiamız doğrudur. □

Teorem 3 (Tek Okunabilirlik)**.**

1. *Her formülün tek bir türü vardır.*
2. *Tek bir şekilde bir formül tümel evetleme olabilir.*

Örneğin $\big(\varphi \land (\psi \land \chi)\big)$ formülü, tümel evetlemedir; ayrıca tek bir şekilde tümel evetlemedir, çünkü sadece φ ve $(\psi \land \chi)$, verilen formülün bileşenleridir. Aslında $\varphi \land (\psi$ ve $\chi)$ sırasıyla A ve B ile gösterilirse, o zaman $\big(\varphi\land(\psi\land\chi)\big)$, $(\mathsf{A}\land\mathsf{B})$ olur, ama A ile B bu formülün bileşenleri değildir, çünkü formül değildir.

Teoremin kanıtı. Bir formülün ilk simgesi

- bir terim ise, formül bir içermedir;
- $\neg$ ise, formül bir değillemedir;
- (ise, formül bir tümel evetlemedir;
- $\exists$ ise, formül bir örneklemedir.

Ayrıca eğer φ, ψ, χ, ve π formülleri için $(\varphi \land \psi)$ ve $(\chi \land \pi)$ aynı formül ise, o zaman Lemma 1'den φ ve χ aynı formüldür, dolayısıyla ψ ve π aynı formüldür. □

Bir değişkenin bir formülde birkaç tane **geçişi** (*occurrence*) olabilir. Örneğin $\exists x\ (x \in y \land x \in z)$ formülünde x değişkeninin üç tane geçişi vardır (ayrıca y ve z'nin birer geçişi vardır).

Teorem 3 sayesinde bir formülde bir değişkenin bir geçişinin **serbest** (*free*) olmasına *özyineli* bir tanım verebiliriz:

1. Bir içermede bir değişkenin her geçişi, serbesttir.
2. Bir değillemenin bileşeninde bir değişkenin serbest bir geçişi, değillemenin kendisinde serbesttir.
3. Bir tümel evetlemenin bir bileşeninde bir değişkenin serbest bir geçişi, tümel evetlemenin kendisinde serbesttir.
4. Bir $\exists x\ \varphi$ örneklemesinde
    - x'ten farklı olan bir değişkenin φ'deki serbest bir geçişi serbesttir;
    - x'in hiç serbest geçişi yoktur.

Serbest olmayan bir geçiş, **bağlıdır** (*bound*).

Bir formülde bir değişkenin serbest geçişi varsa, bu değişken, formülün bir **serbest değişkenidir.** Serbest değişkeni olmayan bir formül, bir **cümledir.** Cümleler için σ, τ, ve ρ gibi Yunan harflerini kullanacağız.

Şimdilik φ, tek serbest değişkeni x olan bir formül; a, bir küme; ve y, bir değişken olsun. Eğer x'in φ'deki her serbest geçişinin yerine a konulursa, o zaman gördüğümüz gibi $\varphi(a)$ cümesi elde edilir. Eğer φ'de y'in bağlı olduğu yerde x serbest değilse, ve x'in φ'deki her serbest geçişinin yerine y konulursa, o zaman

$$\boxed{\varphi(y)}$$

formülü elde edilir. Örneğin φ, $\exists y\ y \in x$ ise, o zaman y, verilen koşulu sağlamaz, ama $\varphi(z)$, $\exists y\ y \in z$ olur.

Eğer φ'nin birden fazla serbest değişkeni varsa, o zaman benzer ifadeler kullanılabilir (örneğin Teorem 5'in kanıtında).

2.3 Doğruluk ve yanlışlık

Özyine bir tanıma göre her cümle ya **doğrudur** (*true*) ya da **yanlıştır** (*false*).

1. Bir a kümesi bir b kümesinin bir elemanı ise, o zaman $a \in b$ içermesi doğrudur; aksi durumda yanlıştır.
2. Bileşeni doğru ise, o zaman bir değilleme yanlıştır; aksi durumda doğrudur.
3. Bileşenlerinin her biri doğru ise, bir tümel evetleme de doğrudur; aksi durumda yanlıştır.
4. Bir a için $\varphi(a)$ cümlesi doğru ise, o zaman $\exists x\ \varphi(x)$ örneklemesi de doğrudur; aksi durumda yanlıştır.

2.4 Kısaltmalar

Bazı formüller kısalabilir.

2.4.1 Mantık

Yeni iki-konumlu bağlayıcılar ile

- $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ formülü

$$\boxed{(\varphi \vee \psi)}$$

  tikel evetlemesi (*disjunction*),
- $(\neg\varphi \vee \psi)$ formülü

$$\boxed{(\varphi \Rightarrow \psi)}$$

  gerektirmesi (*implication*),
- $\big((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)\big)$ formülü

$$\boxed{(\varphi \Leftrightarrow \psi)}$$

  denkliği (*equivalence*)

olarak kısaca yazılır. Ayrıca yeni bir niceleyici ile

- $\neg\exists x\ \neg\varphi$ formülü

$$\boxed{\forall x\ \varphi}$$

  genelleştirmesi (*generalization*)

olarak kısaca yazılır.

2.4.2 Ayraçlar

- Varsa, bir formülün en dıştaki ayraçları yazılmayabilir.
- $\Rightarrow$ ve $\Leftrightarrow$ bağlayıcılarına göre $\wedge$ ve $\vee$ bağlayıcılarına önceliği verilebilir: örneğin $\varphi \wedge \psi \Rightarrow \chi$ ifadesi, $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \chi$ formülünün anlamına gelir.
- $\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$ ifadesi, $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)$ formülünün anlamına gelir.

2.4.3 Formüller

Bir yüklemin **yorumu** (*interpretation*), bir **bağıntıdır** (*relation*). Örneğin $\in$ yükleminin yorumu, **eleman olma** (*being an element*) bağıntısıdır. Bu bağıntı, $x \in y$ formülü tarafından tanımlanır. Başka formüllerin tanımladığı bağıntılar için yeni yüklemler kullanacağız.

Bir $\forall x\ (x \in t \Rightarrow x \in s)$ formülünün yerine

$$\boxed{t \subseteq s}$$

kapsaması (*inclusion*) yazılır. Eğer $a \subseteq b$ ise (yani cümle doğru ise), o zaman a, b'nin bir **altkümesidir** (*subset*).

Bir $(t \subseteq s \land s \subseteq t)$ formülünün yerine

$$\boxed{t = s}$$

eşitliği (*equation*) yazılır. Eğer $a = b$ ise, o zaman a, b'ye **eşittir** (*equal*).

Teorem 4. *Her a ve her b kümesi için*

$$a = b \Leftrightarrow \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b).$$

Alıştırma I. Teoremi kanıtlayın.

İçermelerin, kapsamaların, ve eşitliklerin özel değillemeleri vardır.

formül	değillemesi
$t \in s$	$t \notin s$
$t \subseteq s$	$t \nsubseteq s$
$t = s$	$t \neq s$

Bir $(t \subseteq s \land t \neq s)$ formülünün yerine

$$\boxed{t \subset s}$$

yazılır; tabii ki formülün değillemesi $t \not\subset s$. Eğer $a \subset b$ ise, o zaman a, b'nin bir **özaltkümesidir** (*proper subset*).

Şimdi φ ve ψ, tek serbest değişkeni x olan formül olsun. Ayrıca φ ve ψ tarafından tanımlanmış sınıflar sırasıyla $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$ olsun. O zaman $\forall x\ (\varphi \Rightarrow \psi)$ formülünün yerine

$$\boxed{\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}}$$

kapsaması yazılabilir, ve $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$ formülünün yerine

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}}$$

eşitliği yazılır. Bir formülde küme olmayan bir sınıf bir kümenin yerini alamaz, ama $\exists x\ (x = \boldsymbol{A} \wedge \psi)$ formülünün yerine

$$\boxed{\psi(\boldsymbol{A})}$$

kısaltması yazılabilir.

2.4.4 Sınıflar

Bazı sınıfların kısaltması vardır. Aşağıda $\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$, rastgele kümedir.

formül	tanımlanmış sınıf	adı
$x \in \boldsymbol{A} \wedge x \in \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$'nin **kesişimi**
$x \in \boldsymbol{A} \vee x \in \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A}$ ve $\boldsymbol{B}$'nin **birleşimi**
$x \in \boldsymbol{A} \wedge x \notin \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A} \smallsetminus \boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A}$'nın $\boldsymbol{B}$'den **farkı**
$x = x$	$\mathbf{V}$	**evrensel sınıf**
$x \neq x$	$\varnothing$	**boş sınıf**
$x \subseteq \boldsymbol{A}$	$\mathscr{P}(\boldsymbol{A})$	$\boldsymbol{A}$'nın **kuvvet sınıfı**
$\forall y\ (y \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in y)$	$\bigcap \boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}$'nın **kesişimi**
$\exists y\ (y \in \boldsymbol{A} \wedge x \in y)$	$\bigcup \boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}$'nın **birleşimi**

Tek serbest değişkeni x olan bir φ formülü için $x \in \boldsymbol{A} \land \varphi$ formülü

$$\boxed{\{x \in \boldsymbol{A} \colon \varphi\}}$$

sınıfını tanımlar.

Aşağıda a ve b, rastgele kümedir.

formül	tanımlanmış sınıf	adı
$x \in a \lor x = a$	a'	a'nın **ardılı**
$x = a$	$\{a\}$	
$x = a \lor x = b$	$\{a, b\}$	

2.5 Eşitlik

Teorem 4'e göre eşit kümelerin elemanları aynıdır.

Aksİyom 1 (Eşitlik)**.** *Eşit kümeler aynı kümelerin elemanıdır:*

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x = y \land x \in z \Rightarrow y \in z).$$

Teorem 5. *Eşit kümeler aynı sınıfların elemanıdır: her* $\boldsymbol{A}$ *sınıfı için*

$$\forall x\ \forall y\ (x = y \land x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow y \in \boldsymbol{A}).$$

Kanıt. Eşit a ve b kümeleri için, tümevarım ile her tek serbest değişkeni x olan φ formülü için

$$\varphi(a) \Leftrightarrow \varphi(b)$$

göstereceğiz. Birincisi hariç, durumlar saf mantıktan doğrudur.

1. Eğer bir c kümesi için φ

a) $c \in x$ ise, Teorem 4'ten iddia doğrudur;

b) $x \in c$ ise, Eşitlik Aksiyomu'ndan iddia doğrudur;

c) $x \in x$ ise, $a \in a$ olsun. O zaman Teorem 4'ten $a \in b$, dolayısıyla Eşitlik Aksiyomu'ndan $b \in b$. Simetriden $a \in a \Leftrightarrow b \in b$.

2. Eğer φ'nin bir ψ formülü olduğu durumda iddia doğru ise, o zaman φ'nin $\neg\psi$ olduğu durumda iddia doğrudur.

3. Benzer şekilde eğer φ'nin bir ψ veya bir χ formülü olduğu durumda iddia doğru ise, φ'nin $(\psi \wedge \chi)$ olduğu durumda iddia doğrudur.

4. Eğer serbest değişkenleri x ve y olan bir ψ formülü için, her c kümesi için φ'nin $\psi(x, c)$ olduğu durumda iddia doğru ise, o zaman φ'nin $\exists y\ \psi$ tümel evetlemesi olduğu durumda iddia doğrudur. □

3 Doğal sayılar

3.1 Tümevarım

Teorem 6.

$$\bigcap \varnothing = \mathbf{V}, \qquad \bigcup \varnothing = \varnothing,$$

ve ayrıca her $\boldsymbol{A}$ *sınıfı için*

$$\forall x \ \left(x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \bigcap \boldsymbol{A} \subseteq x \subseteq \bigcup \boldsymbol{A}\right),$$

ve ayrıca her $\boldsymbol{B}$ *sınıfı için*

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \Rightarrow \bigcap \boldsymbol{B} \subseteq \bigcap \boldsymbol{A} \wedge \bigcup \boldsymbol{A} \subseteq \bigcup \boldsymbol{B}.$$

Alıştırma II. Teoremi kanıtlayın.

AKSİYOM 2 (Ayırma). *Her kümenin her altsınıfı bir kümedir.*

Teorem 7. $\mathbf{V}$ *bir küme değildir, ama* $\boldsymbol{A}$ *boş değilse* $\bigcap \boldsymbol{A}$ *bir kümedir.*

Alıştırma III. Teoremi kanıtlayın.

AKSİYOM 3 (Boş Küme). $\varnothing$ *sınıfı bir kümedir.*

Boş küme 0 olarak da yazılır.

Aksiyom 4 (Bitiştirme). *Her a ve her b kümesi için $a \cup \{b\}$ sınıfı bir kümedir.*

Örneğin tanıma göre

$$(a,b) = \big\{\{a\},\{a,b\}\big\}$$

olabilir.

Teorem 8. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ \forall w\ \big((x,y)=(z,w) \Leftrightarrow x=z \land y=w\big)$.

Alıştırma IV. Teoremi kanıtlayın.

Ayrıca her kümenin ardılı da bir kümedir. Tanıma göre

$$1 = 0', \qquad 2 = 1', \qquad 3 = 2', \qquad \dots$$

olsun. Bir $\boldsymbol{A}$ sınıfı için, eğer
1) $0 \in \boldsymbol{A}$,
2) $\forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x' \in \boldsymbol{A})$

ise, $\boldsymbol{A}$'ya **tümevarımli** densin. Örneğin $\mathbf{V}$ tümevarımlıdır.

Aksiyom 5 (Sonsuzluk). *Tümevarımlı bir küme vardır.*

Tanıma göre ω, tümevarımlı kümelerin oluşturduğu sınıfın kesişimi olsun. Böylece

$$\omega = \bigcap\{X : 0 \in X \land \forall y\ (y \in X \Rightarrow y' \in X)\}.$$

Ayrıca

$$\mathbb{N} = \omega \smallsetminus \{0\}$$

olsun. Sonsuzluk ve Ayırma aksiyomları sayesinde ω ve $\mathbb{N}$, kümedir. Birincisi **doğal sayıları** içerir; ikincisi, **sayma sayılarını.**

- k, ℓ, m, ve n, sabit doğal sayılar gösterecektir;

- i ve j, doğal sayı değişkendirler.

Teorem 9 (Tümevarım).

1. *ω tümevarımlıdır.*
2. *ω'nın tek tümevarımlı altkümesi kendisidir.*

Kanıt. 1. ω tümevarımlıdır çünkü

a) her tümevarımlı küme 0'ı içerir, dolayısıyla $0 \in \omega$;

b) eğer $k \in \omega$ ise, o zaman her A tümevarımlı kümesi k'yi içerir, dolayısıyla $k' \in A$; sonuç olarak $k' \in \omega$.

2. Eğer A tümevarımlı ise, o zaman Teorem 6 sayesinde $\omega \subseteq A$. Eğer ayrıca $A \subseteq \omega$ ise, o zaman $A = \omega$. □

Sonraki teorem, tümevarımın en basit aşikâr olmayan uygulamadır.

Teorem 10. *Her doğal sayının ya 0 ya da doğal bir sayının ardılı olduğunu gösterin.*

Alıştırma V. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 11. *Her doğal sayının her elemanı, doğal sayıdır.*

Alıştırma VI. Teoremi kanıtlayın.

Özaltküme olma bağıntısı hem **yansımasızdır** hem de **geçişlidir,** çünkü sırasıyla

$$\forall x\, x \not\subset x,$$
$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \subset y \land y \subset z \Rightarrow x \subset z).$$

Kısaca özaltküme olma, bir **sıralamadır**.

Teorem 12. *ω'da*

$$k \in n \Rightarrow k \subset n.$$

Kanıt. n üzerine tümevarım kullanacağız.

1. 0'nın elemanı olmadığından 0'ın her elemanı bir özaltkümedir.

2. Bir m doğal sayısı için tümevarım hipotezi olarak m'nin her elemanı bir özaltküme olsun. Bu durumda $m \not\subset m$ olduğundan $m \notin m$, dolayısıyla

$$m \subset m'. \tag{3.1}$$

Şimdi $k \in m'$ olsun. O zaman

$$k \in m \lor k = m.$$

a) Eğer $k \in m$ ise hipotezden $k \subset m$.
b) Eğer $k = m$ ise $k \subseteq m$.
Her durumda (3.1) sayesinde $k \subset m'$. Böylece tümevarım tamamlanmıştır. □

Teorem 13. *Ardılları aynı olan doğal sayılar da aynıdır:* ω*'da*

$$k' = n' \Rightarrow k = n.$$

Alıştırma VII. Teoremi kanıtlayın.

Peano Aksiyomları, aşağıdaki üç sonuçtur:
1. 0'ın ardıl olması
2. Teorem 9
3. Teorem 13

Bunlardan doğal sayıların matematikte kullanılan tüm özellikleri kanıtlanabilir. Matematikte doāl sayılarının *küme* olduğu kullanılmaz, ama bu özellik ile kümeler kuramında doğal sayıların diğer özelliklerini kanıtlamak daha kolaydır.

Teorem 14. *Eğer* $n \in \omega$ *ise, o zaman her* k *doğal sayısı için*

$$k \subset n \Rightarrow k \in n.$$

Kanıt. Tümevarım kullanacağız.

1. Her k doğal sayısı için $k \not\subset 0$, dolayısıyla
$$k \subset 0 \Rightarrow k \in 0.$$

2. Bir m doğal sayısı için tümevarım hipotezi olarak her k doğal sayısı için
$$k \subset m \Leftrightarrow k \in m$$
olsun. Eğer $k \subset m'$ ise, o zaman $k \subseteq m$ veya $m \in k$. Son durum imkânsızdır çünkü $m \in k$ ise, Teorem 12'den
$$m \subset k \subset m',$$
ki bu imkânsızdır. Sonuç olarak $k \subseteq m$.

- Eğer $k = m$ ise, o zaman $k \in m'$.
- Eğer $k \subset m$ ise, o zaman $k \in m$, dolayısıyla $k \in m'$.

Tümevarım tamamdır. □

Sonuç olarak ω'da $\in$ ve $\subset$, aynı bağıntıdır. Özel olarak ω'da $\in$ bağıntısı bir sıralamadır.

Teorem 15. *Tüm k ve n doğal sayıları için*
$$k \subseteq n \vee n \subset k.$$

Kanıt. 1. Her k için $0 \subseteq k$, dolayısıyla
$$k \subseteq 0 \vee 0 \subset k.$$

2. ω'da bir m için, her k için,
$$k \subseteq m \vee m \subset k$$
olsun, ama bir k için $k \nsubseteq m'$ olsun. O zaman
$$k \neq m', \qquad k \nsubseteq m,$$

dolayısıyla, hipotez sayesinde, $m \subset k$. Ayrıca Teorem 14'ten $m \in k$, dolayısıyla

$$m' \subset k. \qquad \square$$

Sonuç olarak ω'da $\subset$ veya $\in$ sıralaması, **doğrusal** bir sıralamadır.

Teorem 16. *$\in$ sıralamasına göre her doğal sayının boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı vardır, ve bu eleman, altkümenin kesişimidir.*

Kanıt. 1. 0'ın boş olmayan hiç altkümesi olmadığından iddia 0 için aşikâr bir şekilde doğrudur.

2. Bir m için iddia doğru olsun, ve

$$0 \subset A \subseteq m'$$

olsun. İki durum vardır.

a) Eğer $A = \{m\}$ ise, o zaman m, aşikâr bir şekilde A'nın diğer elemanlarının elemanıdır, çünkü başka eleman yoktur.

b) Diğer durumda hipoteze göre $\bigcap(A \smallsetminus \{m\})$ kesişimi, $A \smallsetminus \{m\}$ farkının en küçük elemanıdır. Ayrıca

$$A \smallsetminus \{m\} \subseteq m,$$

dolayısıyla $\bigcap(A \smallsetminus \{m\})$ A'nın en küçük elemanıdır. $\square$

Sonuç. *$\in$ sıralamasına göre ω'nın boş olmayan her altkümesinin en küçük elemanı vardır, ve bu eleman, altkümenin kesişimidir.*

Alıştırma VIII. Sonucu kanıtlayın.

Kısaca ω'da $\in$ veya $\subset$ doğrusal sıralaması, **iyisıralamadır.** Ayrıca her doğal sayıda da $\in$ bir iyisıralamadır.

Alıştırma IX (Güçlü Tümevarım). A, ω'nın öyle altkümesi olsun ki

- her n doğal sayısı için

  $$n \subseteq A \Rightarrow n \in A$$

  olsun. (Kısaca A, kapsadığı her doğal sayıyı içersin.)

A'nın ω olduğunu kanıtlayın. *İpucu*: Önce $\boldsymbol{A}$'nın her doğal sayıyı kapsadığını kanıtlayın.

3.2 Özyineleme

Bir $\boldsymbol{R}$ bağıntısı için, bir $\boldsymbol{D}$ sınıfı için, eğer

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x \in \boldsymbol{D} \land x\ \boldsymbol{R}\ y \land x\ \boldsymbol{R}\ z \Rightarrow y = z)$$

ise, o zaman $\boldsymbol{D}$'de $\boldsymbol{R}$ bir **göndermeyi** tanımlar. Eğer bu göndermeye $\boldsymbol{F}$ denirse, o zaman $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{F}$'nin **tanım sınıfıdır,** ve $x \in \boldsymbol{D} \land x\ \boldsymbol{R}\ y$ formülünün yerine

$$\boldsymbol{F}(x) = y$$

yazılabilir; ayrıca $\boldsymbol{F}$'nin yerine

$$x \mapsto \boldsymbol{F}(x)$$

yazılabilir. Örneğin $\mathbf{V}$'de $x \mapsto x'$ göndermesi vardır.

Eğer bir $\boldsymbol{E}$ sınıfı için

$$\forall x\ \forall y\ (\boldsymbol{F}(x) = y \Rightarrow y \in \boldsymbol{E})$$

ise, bu cümle

$$\boldsymbol{F} \colon \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{E}$$

olarak yazılabilir.

$\exists x\ \exists y\ \big(z=(x,y)\land \boldsymbol{F}(x)=y\big)$ formülü tarafından tanımlanmış sınıf

$$\{(x,y)\colon \boldsymbol{F}(x)=y\}$$

olarak yazılabilir, ve bu sınıf, $\boldsymbol{F}$'nin kendisi olarak anlaşılabilir.

Aksİyom 6 (Yerleştirme)**.** *Her $\boldsymbol{F}$ göndermesi için, $\boldsymbol{F}$'nin tanım sınıfının her a altkümesi için*

$$\{y\colon \exists x\ (\boldsymbol{F}(x)=y\land x\in a)\}$$

sınıfı bir kümedir.

Aksiyomda verilen küme

$$\{\boldsymbol{F}(x)\colon x\in a\},\qquad\qquad \boldsymbol{F}[a]$$

ifadelerinin biri ile gösterilebilir. Eğer $\boldsymbol{F}$'nin tanım sınıfı bir küme ise, o zaman Yerleştirme Aksiyomu'ndan $\boldsymbol{F}$'nin kendisi de bir kümedir.

Teorem 17 (Özyineleme)**.** *Bazı b, A, ve f için*

1) $b\in A$,

2) $f\colon A\to A$

olsun. O zaman ω'dan A'ya giden bir ve tek bir g göndermesi için

1) $g(0)=b$,

2) her k doğal sayısı için $g(k+1)=f\big(g(k)\big)$.

Şekil 1'e bakın.

Kanıt. İstediğimiz özellikleri olan bir gönderme varsa, o zaman tümevarımdan tek bir örnek vardır.

Şimdi elemanları gönderme olan bir $\mathscr{C}$ kümesini tanımlayacağız. $\mathscr{C}$'nin her h elemanı için,

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "g"'] & \omega \arrow[r, "x\mapsto x+1"] \arrow[d, "g"'] & \omega \arrow[d, "g"] \\
\{b\} \arrow[r, "\subseteq"'] & A \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

Şekil 1: Özyineleme

1) h'nin tanım kümesi ω'nin bir altkümesidir, ve
2) herhangi ℓ doğal sayısı için, $h(\ell)$ tanımlanırsa, o zaman
    a) ya $\ell = 0$ ve $h(\ell) = b$,
    b) ya da bir k doğal sayısı için $\ell = k + 1$, $h(k)$ tanımlanır, ve
$$h(\ell) = f\big(h(k)\big).$$

İstediğimiz gibi g göndermesi varsa $\mathscr{C}$'nin elemanıdır. Her k doğal sayısı için, A'nın bir ve tek bir d elemanı için, $\mathscr{C}$'nin bir h elemanı için $h(k) = d$ göstereceğiz. Bu şekilde $g(k) = d$ tanımlanabilir.

Yukarıdaki özelliği olan k doğal sayıları, E kümesini oluştursun. Tanım kümesi $\{0\}$ olan bir h göndermesi için $h(0) = b$. O zaman $h \in \mathscr{C}$. Ayrıca $\mathscr{C}$'nin herhangi h elemanı için $h(0)$ tanımlanırsa, o zaman $h(0) = b$ olmalıdır, çünkü hiç k doğal sayısı için $k + 1 = 0$ değildir. Bu şekilde $0 \in E$.

Şimdi $k \in E$ olsun. O zaman A'nın bir ve tek bir d elemanı için, $\mathscr{C}$'nin bir h elemanı için $h(k) = d$.

1. Eğer $h(k+1)$ tanımlanırsa, o zaman $\mathscr{C}$'nin tanımına göre $h(k + 1) = f(d)$, çünkü $k + 1 \neq 0$, ve ayrıca herhangi ℓ doğal sayısı için eğer $\ell + 1 = k + 1$ ise, o zaman $\ell = k$.

2. Eğer $h(k+1)$ tanımlanmazsa, o zaman yeni bir h^* göndermesi için

$$h^*(x) = \begin{cases} h(x), & \text{eğer } h(x) \text{ tanımlanırsa,} \\ f(d), & \text{eğer } x = k+1. \end{cases}$$

   O zaman $h^* \in \mathscr{C}$ ve $h^*(k+1) = f(d)$.

Bu şekilde, her durumda, $\mathscr{C}$'nin bir h elemanı için $h(k+1) = f(d)$.

Mümkümse $d^* \in A$, $d^* \neq f(d)$ olsun, ama $\mathscr{C}$'nin bir h elemanı için $h(k+1) = d^*$ olsun. O zaman $k+1 \neq 0$ olduğundan bir ℓ doğal sayısı için $\ell+1 = k+1$, $h(\ell)$ tanımlanır, ve $d^* = f\big(h(\ell)\big)$. Ama bu durumda $\ell = k$, dolayısıyla $h(\ell) = d$ ve $d^* = f(d)$.

Sonuç olarak $k+1 \in E$. Tümevarım ile $E = \omega$. □

Özyineleme yöntemiyle ω'da toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabiliriz:

$$k + (n+1) = (k+n)+1, \quad k \cdot 1 = k, \quad k \cdot (n+1) = kn + k.$$

Şimdi tümevarım ve kalan Peano Aksiyomları ile toplamanın ve çarpmanın özelliklerini kanıtlayabiliriz; ayrıca ω'nın sıralamasını tanımlayıp özelliklerini kanıtlayabiliriz. Ondan sonra $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ yapılarını elde edebiliriz.

Doğal sayılar, *sonlu ordinallerdir*; ω, sonsuz bir ordinaldır.

4 Ordinal Sayılar

4.1 Ordinaller

Eğer bir sınıfın her elemanı bir altküme ise, o zaman sınıf **geçişlidir.** Eğer $\boldsymbol{A}$ geçişli ise, o zaman

$$c \in b \wedge b \in \boldsymbol{A} \Rightarrow c \in \boldsymbol{A}.$$

Örneğin

- Teorem 11'e göre ω geçişlidir;
- Teorem 12'ye göre ω'nın her elemanı da geçişlidir.

Tanıma göre

1) geçişli olan
2) $\in$ tarafından iyisıralanmış olan

bir küme bir **ordinal sayıdır.**

- Teorem 16 sayesinde ω'nın her elemanı bir ordinaldir;
- teoremin sonucu sayesinde ω bir ordinaldir.

Alıştırma X. Bulun

(a) $\in$ bağıntısının geçişli olduğu, geçişli olmayan bir küme;
(b) $\in$ bağıntısının geçişli olmadığı, geçişli olan bir küme.

Ordinaller

$$\mathbf{ON}$$

sınıfını oluştururlar. Küçük Yunan harfleri her zaman **ON**'nin elemanları gösterecektir. Özel olarak

- α, β, γ gibi harfler sabit ordinaldirler, ama
- ξ, η, ve ζ, ordinal değişkendirler.

Örnegin
$$\{\xi\colon \varphi(\xi)\} = \{x\colon x \in \mathbf{ON} \wedge \varphi(x)\}.$$

Teorem 18. **ON** *geçişlidir, dolayısıyla her ordinalin her elemanı bir ordinaldir.*

Kanıt. $\alpha \in \mathbf{ON}$ be $b \in \alpha$ olsun. O zaman $b \subseteq \alpha$, dolayısıyla α gibi b, $\in$ tarafından iyisıralanmıştır.

Şimdi $c \in b$ olsun. O zaman $c \in \alpha$, dolayısıyla $c \subseteq \alpha$. Özel olarak $d \in c$ ise $d \in \alpha$. Bu durumda d, c, ve b, α'nın elemanıdırlar; ayrıca $d \in c$ ve $c \in b$, dolayısıyla $d \in b$ çünkü α'da $\in$ geçişlidir. Sonuç olarak $c \subseteq b$. O halde b geçişlidir. □

Lemma 2. **ON**, $\in$ *tarafından sıralanmıştır.*

Kanıt. $\alpha \in \mathbf{ON}$ olsun. α'da $\in$ bağıntısı yansımasız olduğundan $\alpha \notin \alpha$, çünkü $\alpha \in \alpha$ ise α'nın bir β elemanı için $\beta \in \beta$.

Eğer $\beta \in \alpha$ ve $\gamma \in \beta$ ise, α geçişli olduğundan $\gamma \in \alpha$. □

Lemma 3. **ON**'*de* $\in$ *ve* $\subset$ *sıralamaları aynıdır.*

Kanıt. Kanıtın iki parçası vardır.

1. $\boxed{\boldsymbol{\alpha \in \beta \Rightarrow \alpha \subset \beta}\colon}$ $\alpha \in \beta$ olsun. β geçişli olduğundan $\alpha \subseteq \beta$. β'da $\in$ yansımasız olduğundan $\alpha \neq \beta$. Bu şekilde $\alpha \subset \beta$.
2. $\boxed{\boldsymbol{\alpha \subset \beta \Rightarrow \alpha \in \beta}\colon}$ $\alpha \subset \beta$ olsun. O zaman $\beta \smallsetminus \alpha$ kümesi boş değildir. $\gamma = \min(\beta \smallsetminus \alpha)$ olsun. O zaman $\gamma \in \beta$. Biz $\boxed{\boldsymbol{\gamma = \alpha}}$ kanıtlayacağız. Bu kanıtın iki parçası vardır.
   a) $\boxed{\boldsymbol{\gamma \subseteq \alpha}\colon}$ $\delta \in \gamma$ olsun. O zaman β geçişli olduğundan $\delta \in \beta$. Ayrıca $\delta \notin \beta \smallsetminus \alpha$, çünkü $\delta \in \min(\beta \smallsetminus \alpha)$. O halde $\delta \in \alpha$. Böylece $\gamma \subseteq \alpha$.

b) $\boxed{\boldsymbol{\alpha} \subseteq \boldsymbol{\gamma}\text{:}}$ $\delta \in \alpha$ olsun. O zaman $\delta \in \beta$, çünkü $\alpha \subset \beta$, dolayısıyla $\delta \notin \beta \smallsetminus \alpha$. Ama $\delta \in \gamma$, $\delta = \gamma$, veya $\gamma \in \delta$; ve son iki imkân olmaz. Zira $\gamma \in \beta \smallsetminus \alpha$ olduğundan $\delta \neq \gamma$; ve $\gamma \notin \alpha$ olduğundan $\gamma \notin \delta$, çünkü $\delta \in \alpha$. Bu şekilde $\alpha \subseteq \gamma$. □

Teorem 19. *Her ordinalde $\in$ ve $\subset$ sıralamaları aynıdır.*

Alıştırma XI. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi **ON**'nin ve her elemanının $\in$ veya $\subset$ sıralamasını $<$ olarak yazabiliriz.

Lemma 4. **ON**'*nin $<$ sıralaması doğrusaldır.*

Kanıt. $\alpha \nleqslant \beta$ olsun. $\boxed{\boldsymbol{\beta} < \boldsymbol{\alpha}}$ göstereceğiz.

Varsayımdan $\alpha \nsubseteq \beta$, dolayısıyla $\alpha \smallsetminus \beta \neq \varnothing$. $\gamma = \min(\alpha \smallsetminus \beta)$ olsun. O zaman $\gamma \in \alpha$, yani $\gamma < \alpha$. $\boxed{\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta}}$ göstereceğiz.

$\boxed{\boldsymbol{\gamma} \subseteq \boldsymbol{\beta}\text{:}}$ $\delta \in \gamma$ olsun. O zaman $\delta < \min(\alpha \smallsetminus \beta)$, ama $\delta \in \alpha$, dolayısıyla $\delta \in \beta$.

$\boxed{\boldsymbol{\gamma} \not\subset \boldsymbol{\beta}\text{:}}$ $\gamma \in \alpha \smallsetminus \beta$ olduğundan $\gamma \notin \beta$, yani $\gamma \not\subset \beta$. □

Teorem 20. **ON**'*nin $<$ doğrusal sıralaması bir iyisıralamadır. Aslında* **ON**'*nin boş olmayan her* altsınıfının *en küçük elemanı vardır.*

Kanıt. $\boldsymbol{A} \subseteq$ **ON** ve $\alpha \in \boldsymbol{A}$ olsun.

- $\alpha \cap \boldsymbol{A} = \varnothing$ ise $\alpha = \min(\boldsymbol{A})$.
- $\alpha \cap \boldsymbol{A} \neq \varnothing$ ise $\min(\alpha \cap \boldsymbol{A}) = \min(\boldsymbol{A})$. □

Teorem 21 (Burali-Forti Paradoksu)**.** **ON** *küme değildir.*

Kanıt. Şimdi Teorem 18 ve 20'den **ON** hem geçişli hem $\in$ tarafından iyisıralanmıştır. Tanıma göre **ON**'nin elemanlarının aynı özellikleri vardır. Ama **ON** $\in$ tarafından sıralanmış olduğundan kendinin elemanı olamaz. Bu şekilde **ON** küme olamaz. □

Teorem 22.

1. *$\varnothing \in$ **ON**.*
2. *$\alpha \in$ **ON** ise $\alpha' \in$ **ON** ve ayrıca her β ordinali için*

$$\beta \leqslant \alpha \vee \alpha' \subseteq \beta.$$

Alıştırma XII. Teoremi kanıtlayın.

Tanıma göre ne 0 ne bir ardıl olan bir ordinal bir **limittir.** O zaman ω bir limittir ve (Teorem 10 sayesinde) en küçük limittir. Sonsuzluk Aksiyomu'nu kullanmadan ω, ne limit olan ne limit içeren ordinallerin oluşturduğu sınıf olarak tanımlanabilir.

Teorem 23. *Sıfır olmayan bir α ordinalinin limit olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\beta < \alpha \Rightarrow \beta' < \alpha.$$

Alıştırma XIII. Teoremi kanıtlayın.

AKSİYOM 7 (Bileşim)**.** *Her kümenin bileşimi bir kümedir.*

Varsa, doğrusal sıralanmış bir sınıfın bir A altkümesinin en küçük üstsınırı, A'nın **supremumudur** ve

$$\sup A$$

olarak yazılır.

Teorem 24. ***ON****'nın her altkümesinin supremumu vardır. Aslında $B \subset$ **ON** ise*

$$\sup B = \bigcup B.$$

Alıştırma XIV. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi Burali-Forti Paradoksu'nun (yani Teorem 21'in) başka bir kanıtı vardır. Her ordinalin daha büyüğü olduğundan **ON**'nin en büyük elemanı yoktur, dolayısıyla **ON**'nin **ON**'de olan üstsınırı yoktur. **ON**'nin her altkümesinin üstsınırı olduğundan **ON**'nin kendisi küme olamaz.

4.2 Tümevarım ve Özyineleme

Teorem 25 (Ordinal Tümevarım)**.** $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbf{ON}$ *olsun. Eğer*

1) $0 \in \boldsymbol{A}$*,*

2) Her β *için*

$$\beta \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \beta' \in \boldsymbol{A},$$

3) her γ *limiti için*

$$\gamma \subseteq \boldsymbol{A} \Rightarrow \gamma \in \boldsymbol{A} \tag{4.1}$$

ise, o zaman $\boldsymbol{A} = \mathbf{ON}$*.*

Kanıt. Verilen koşullar altında $\mathbf{ON} \smallsetminus \boldsymbol{A}$ farkının en küçük elemanı olamaz. Zira mümkümse $\alpha = \min(\mathbf{ON} \smallsetminus \boldsymbol{A})$ olsun.

1. $\alpha = 0$ ise $\alpha \in \boldsymbol{A}$.

2. $\alpha = \beta'$ ise $\beta < \alpha$ olduğundan $\beta \in \boldsymbol{A}$, ama bu durumda $\beta' \in \boldsymbol{A}$, yani $\alpha \in \boldsymbol{A}$.

3. Varsayımımıza göre $\beta < \alpha$ ise $\beta \in \boldsymbol{A}$. Bu şekilde $\alpha \subseteq \boldsymbol{A}$. Eğer ayrıca α bir limit ise, o zaman (4.1) sayesinde α da $\boldsymbol{A}$'nın elemanı olmalıdır.

Bu şekilde her ordinal ya 0, ya bir ardıl, ya da bir limit olduğundan $\alpha \in \boldsymbol{A}$, ama $\alpha = \min(\mathbf{ON} \smallsetminus \boldsymbol{A})$ varsayımına göre $\alpha \notin \boldsymbol{A}$. Öyleyse varsayım imkânsızdır. **ON**'nin her boş olmayan altkümesinin en küçük elemanı var olduğundan $\mathbf{ON} \smallsetminus \boldsymbol{A} = \varnothing$, dolayısıyla $\boldsymbol{A} = \mathbf{ON}$. □

Ordinal tümevarım ile Teorem 26'yı, Teorem 28'i, Teorem 32'yi, ve daha sonraki teoremler kanıtlayacağız. Ordinal tümevarım kullanılan bir kanıtın üç adımı vardır:

1) sıfır adımı,
2) ardıl adımı, ve
3) limit adımı.

Ayrıca kanıtta iki tümevarım hipotezi vardır. Ordinal Tümevarım Teoremini yazarken kullandığımız harflerde,

- ardıl adımının hipotezi, $\beta \in \boldsymbol{A}$;
- limit adımının hipotezi, $\gamma \subseteq \boldsymbol{A}$, yani

$$\forall \xi \; (\xi < \gamma \Rightarrow \xi \in \boldsymbol{A}).$$

Teorem 26 (Ordinal Özyineleme)**.** *Varsayımlarımız,*

1) $\theta \in \mathbf{ON}$*,*
2) $\boldsymbol{F} \colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$*.*

O zaman bir ve tek bir $\boldsymbol{H}$ *ordinal işlemi için*

1) $\boldsymbol{H}(0) = \theta$*,*
2) her β *ordinali için* $\boldsymbol{H}(\beta') = \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{H}(\beta)\big)$*,*
3) her γ *limiti için* $\boldsymbol{H}(\gamma) = \sup\{\boldsymbol{H}(\xi) \colon \xi < \gamma\}$*.*

Kanıt. Her α için, tanım kümesi $\{\xi \colon \xi \leqslant \alpha\}$ olan bir ve tek bir h_α göndermesi için,

1) $h_\alpha(0) = \theta$,
2) $\beta < \alpha$ ise $h_\alpha(\beta') = \boldsymbol{F}\big(h_\alpha(\beta)\big)$,
3) $\gamma \leqslant \alpha$ ve limit ise $h_\alpha(\gamma) = \sup\{h_\alpha(\xi) \colon \xi < \gamma\}$.

Bunu kanıtlamak için, ordinal tümevarım kullanacağız.

1. h_0, $h_0(0) = \theta$ ile tanımlanabilir ve tanımlanmalıdır. Yani $\alpha = 0$ durumunda iddia doğrudur.

2. Eğer $\alpha = \delta$ durumunda iddia doğru ise $h_{\delta'}$,

$$h_{\delta'}(\xi) = \begin{cases} h_\delta(\xi), & \xi \leqslant \delta \text{ durumunda,} \\ \boldsymbol{F}\big(h_\delta(\delta)\big), & \xi = \delta' \text{ durumunda} \end{cases}$$

kuralı tarafından tanımlanabilir. Ayrıca $h_{\delta'}$ bu şekilde tanımlanmalıdır, çünkü hipoteze göre

$$h_{\delta'} \upharpoonright \{\xi \colon \xi \leqslant \delta\} = h_\delta$$

olmalıdır. Bundan dolayı $\alpha = \delta'$ durumunda iddia doğrudur.

3. Benzer şekilde bir δ için $\alpha < \delta$ durumlarında iddia doğru ise, o zaman $\alpha < \beta < \delta$ durumlarında $h_\alpha(\alpha) = h_\beta(\alpha)$. Eğer ayrıca δ bir limit ise, o zaman h_δ,

$$h_\delta(\xi) = \begin{cases} h_\xi(\xi), & \xi < \delta \text{ durumunda,} \\ \sup\{h_\xi(\xi) \colon \xi < \delta\}, & \xi = \delta \text{ durumunda} \end{cases}$$

kuralı tarafından tanımlanabilir ve tanımlanmalıdır, ve bu şekilde $\alpha = \delta$ durumunda iddia doğrudur.

Ordinal tümevarımımız bitti. Şimdi $\boldsymbol{H}(\xi) = h_\xi(\xi)$ tanımlanabilir ve tanımlanmalıdır. □

Bölümler 5, 6, ve 7'de ordinal özyinelemeyle ordinal toplama, çarpma, ve kuvvet alma işlemlerini tanımlayacağız.

4.3 Normal işlemler

Şimdi $\boldsymbol{F}$, herhangi ordinal işlem olsun. Ordinal aksiyomarına göre $\{\boldsymbol{F}(\xi) \colon \xi < \alpha\}$ sınıfı her zaman bir kümedir, dolayısıyla Teorem 24'e göre supremumu vardır. Bu supremum,

$$\sup_{\xi < \alpha} \boldsymbol{F}(\xi)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 27. *Her α ordinali için*

$$\sup_{\xi<\alpha} \xi = \begin{cases} 0, & \alpha = 0 \textit{ durumunda}, \\ \beta, & \alpha = \beta' \textit{ durumunda}, \\ \alpha, & \alpha\textit{'nın limit olduğu durumda.} \end{cases}$$

Alıştırma XV*.* Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma XVI*.* $\{\xi' \colon \xi < \alpha\}$ kümesinin supremumunu hesaplayın.

Eğer

$$\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) \leqslant \boldsymbol{F}(\beta)$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$ **artandır.** Eğer

$$\alpha < \beta \Rightarrow \boldsymbol{F}(\alpha) < \boldsymbol{F}(\beta) \tag{4.2}$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$ **kesin artandır.** Eğer

1) $\boldsymbol{F}$ kesin artan ve
2) her α limiti için

$$\boldsymbol{F}(\alpha) = \sup_{\xi<\alpha} \boldsymbol{F}(\xi) \tag{4.3}$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$'ye **normal** densin.

Alıştırma XVII*.* $\xi \mapsto \xi'$ işleminin kesin artan olup normal olmadığını gösterin.

Alıştırma XVIII*.* Normal olan bir işlem örneği verin.

Sonraki teoremin ilk kullanımı, Teorem 33'ün kanıtında olacaktır.

Teorem 28. $\boldsymbol{F} \colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *olsun. Eğer*

1) her α için $\boldsymbol{F}(\alpha) < \boldsymbol{F}(\alpha')$ ve

2) her α limiti için (4.3) doğru
ise, o zaman $\boldsymbol{F}$ normaldir.

Kanıt. $\boldsymbol{F}$'nin kesin artan olduğunu göstermek yeter. (4.2) gerektirmesini β üzerinden tümevarım kullanarak kanıtlayacağız.

1. $\beta = 0$ ise, (4.2) iddiası doğrudur, çünkü hiçbir zaman $\alpha < 0$ değildir.

2. $\beta = \gamma$ durumda (4.2) iddia doğru olsun. Eğer $\alpha < \gamma'$ ise, o zaman $\alpha \leqslant \gamma$, dolayısıyla

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(\alpha) &\leqslant \boldsymbol{F}(\gamma) && \text{[tümevarım hipotezi]} \\ &< \boldsymbol{F}(\gamma'). && \text{[varsayım]} \end{aligned}$$

3. γ limit ve $\alpha < \gamma$ ise, o zaman $\alpha < \alpha' < \gamma$, dolayısıyla

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}(\alpha) &< \boldsymbol{F}(\alpha') && \text{[varsayım]} \\ &\leqslant \sup_{\xi<\gamma} \boldsymbol{F}(\xi) && \text{[supremumun tanımı]} \\ &= \boldsymbol{F}(\gamma). && \text{[varsayım]} \end{aligned}$$

(Bu adımda bir tümevarım hipotezi kullanılmıyor.) □

Sonraki teoremin ilk kullanımı, Teorem 34'ün kanıtında olacaktır.

Teorem 29. $\boldsymbol{F}\colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ *ve normal olsun. O zaman* **ON***'nin boş olmayan her A altkümesi için*

$$\boldsymbol{F}\big(\sup(A)\big) = \sup_{\xi\in A} \boldsymbol{F}(\xi). \tag{4.4}$$

Kanıt. A kümesinin supremumu α olsun. $\boldsymbol{F}$ kesin artan olduğundan $\beta \in A$ ise $\boldsymbol{F}(\beta) \leqslant \boldsymbol{F}(\alpha)$. Bundan dolayı, eğer $\alpha \in A$ ise, o zaman

$$\sup_{\xi\in A} \boldsymbol{F}(\xi) = F(\alpha),$$

yani (4.4) doğrudur. Şimdi $\alpha \notin A$ olsun. O zaman α ardıl olamaz. A boş olmadığından $\alpha = 0$ olamaz, dolayısıyla α limittir. Bu durumda $\boldsymbol{F}$ normal olduğundan

$$\boldsymbol{F}(\alpha) = \sup_{\xi<\alpha} \boldsymbol{F}(\xi). \tag{4.5}$$

Ayrıca

$$\sup_{\xi\in A} \boldsymbol{F}(\xi) \leqslant \sup_{\xi<\alpha} \boldsymbol{F}(\xi), \tag{4.6}$$

çünkü $A \subseteq \{\xi \colon \xi < \alpha\}$. Eğer $\beta < \alpha$ ise, A'nın bir γ elemanı için $\beta \leqslant \gamma < \alpha$, dolayısıyla $\boldsymbol{F}(\beta) \leqslant \boldsymbol{F}(\gamma) \leqslant \sup_{\xi\in A} \boldsymbol{F}(\xi)$. Bu şekilde

$$\sup_{\xi<\alpha} \boldsymbol{F}(\xi) \leqslant \sup_{\xi\in A} \boldsymbol{F}(\xi). \tag{4.7}$$

Sonuç olarak (4.5), (4.6), ve (4.7) beraber (4.4) eşitliğini tekrar gerektirir. □

4.4 Süreklilik

Normallik kavramının yerine gerçel analizden gelen süreklilik kavramını kullanabiliriz. Ordinallerde, kesin artan bir işlemin normal olması için gerek ve yeter bir koşul, işlemin sürekli olmasıdır. Bu sonucu kurmak, bu altbölümün işidir.

Tekrar $\boldsymbol{F} \colon \mathbf{ON} \to \mathbf{ON}$ olsun. Varsa, $\boldsymbol{F}$'nin bir α noktasındaki sürekliliği gerçel analizdeki gibi tanımlanır. Öyleyse eğer

$$\varepsilon_0 < \boldsymbol{F}(\alpha) < \varepsilon_1$$

koşulunu sağlayan her ε_0 ve ε_1 için,

$$\delta_0 < \alpha < \delta_1$$

koşulunu sağlayan her δ_0 ve δ_1 için,

$$\forall\xi\ (\delta_0 < \xi < \delta_1 \Rightarrow \varepsilon_0 < \boldsymbol{F}(\xi) < \varepsilon_1)$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$, α'da **süreklidir.** Eğer $\boldsymbol{F}(\alpha) = 0$ veya $\alpha = 0$ ise, o zaman $\varepsilon_0 = -1$ veya $\delta_0 = -1$ olabilir.

Lemma 5. **ON**'*de her işlem, limit olmayan her noktada süreklidir.*

Alıştırma XIX. Lemmayı kanıtlayın.

Teorem 30. *Kesin artan bir ordinal işlemin normal olması için yeter ve gerek bir koşul, işlemin sürekli olmasıdır.*

Alıştırma XX. Teoremi kanıtlayın.

Alıştırma XXI. Sürekli olup normal olmayan bir işlem örneği verin.

5 Ordinal toplama

5.1 Tanım ve özellikler

Özyineli tanıma göre her α ordinali için

$$\alpha + 0 = \alpha, \tag{5.1}$$

$$\alpha + \beta' = (\alpha + \beta)', \tag{5.2}$$

$$\gamma \text{ limit ise } \alpha + \gamma = \sup_{\xi<\gamma}(\alpha + \xi). \tag{5.3}$$

Ordinal toplamanın özelliklerinin çoğu, tümevarım ile kanıtlanır; ama ilk teoremimiz, tümevarımdan değildir.

Teorem 31. $\alpha + 1 = \alpha'$.

Kanıt.

$$\begin{aligned} \alpha + 1 &= \alpha + 0' \\ &= (\alpha + 0)' && [(5.2) \text{ tanımından}] \\ &= \alpha'. && [(5.1) \text{ tanımından}] \end{aligned}$$

□

Teorem 32. *Her α için $0 + \alpha = \alpha$.*

Kanıt. Ordinal tümevarım kullanacağız.

1. Eğer $\alpha = 0$ ise

$$\begin{aligned} 0 + \alpha &= 0 + 0 && [\text{varsayımdan}] \\ &= 0 && [(5.1) \text{ tanımından}] \\ &= \alpha. && [\text{varsayımdan}] \end{aligned}$$

2. Eğer

$$0 + \beta = \beta \tag{5.4}$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned} 0 + \beta' &= (0 + \beta)' && \text{[(5.2) tanımından]} \\ &= \beta'. && \text{[(5.4) hipotezinden]} \end{aligned}$$

3. Bir α limiti için

$$\forall\xi\ (\xi < \alpha \Rightarrow 0 + \xi = \xi) \tag{5.5}$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned} 0 + \alpha &= \sup_{\xi<\alpha}(0 + \xi) && \text{[(5.3) tanımından]} \\ &= \sup_{\xi<\alpha} \xi && \text{[(5.5) hipotezinden]} \\ &= \alpha. && \text{[Teorem 27'den]} \end{aligned}$$ ☐

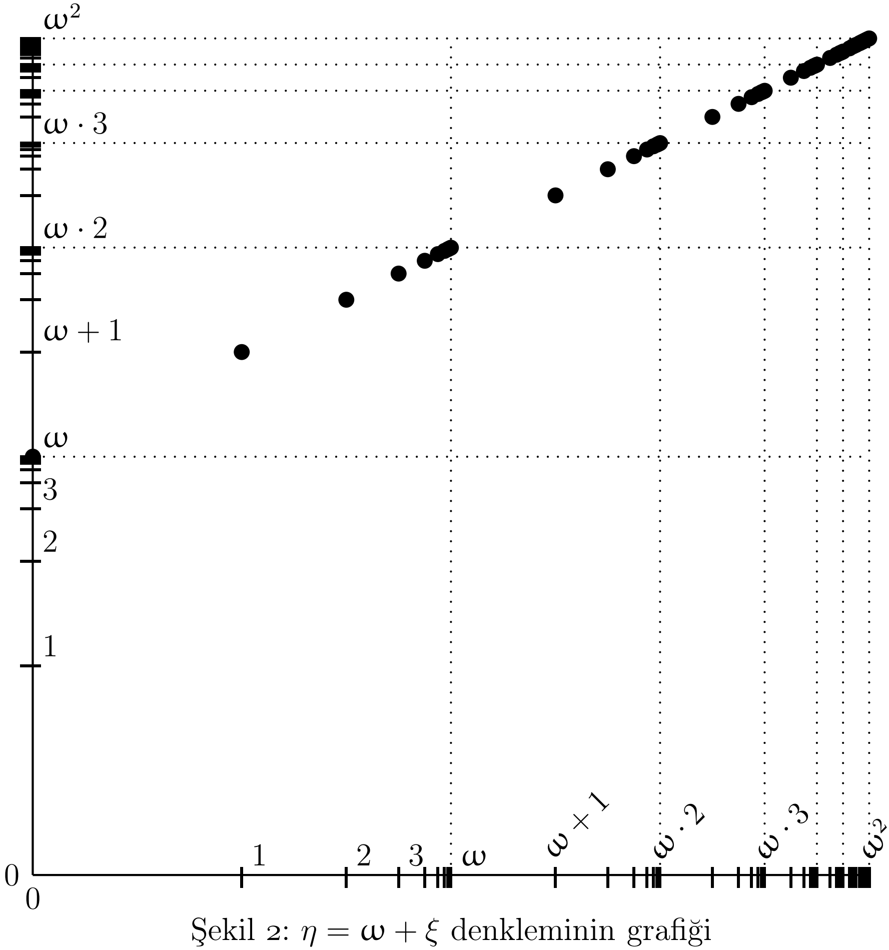
Alıştırma XXII. Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

> Her α için $1 + \alpha = \alpha'$ kanıtlayacağız.
> 1. $1 + 0 = 1 = 0'$.
> 2. $1 + \beta = \beta'$ ise, o zaman
>
> $$1 + \beta' = (1 + \beta)' = (\beta')'.$$
>
> 3. γ limit ve $\forall\xi\ (\xi < \gamma \Rightarrow 1 + \xi = \xi')$ ise
>
> $$1 + \gamma = \sup_{\xi<\gamma}(1 + \xi) = \sup_{\xi<\gamma}(\xi') = \gamma'.$$
>
> Böylece her α için $1 + \alpha = \alpha'$.

Teorem 33. *Her α ordinali için $\xi \mapsto \alpha + \xi$ normaldir.*

Kanıt. Teorem 28'den $\alpha + \beta < \alpha + \beta'$ göstermek yeter. Ayrıca

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &< (\alpha + \beta)' \\ &= \alpha + \beta'. && \text{[(5.2) tanımından]} \end{aligned}$$ ☐



Şekil 2: $\eta = \omega + \xi$ denkleminin grafiği

Örneğin Şekil 2'ye bakın. Teorem 17'yi kullanan resmi özyineli tanıma göre,

$$\omega \cdot 0 = 0, \qquad \omega \cdot 1 = \omega, \qquad \omega \cdot (k+1) = \omega \cdot k + \omega.$$

Bu şekilde $\omega \cdot n$, "ω'dır n kere" veya "ω'nın n katıdır." Ayrıca

$$\omega^2 = \omega \cdot \omega = \sup_{i<\omega}(\omega \cdot i).$$

Alıştırma XXIII. $\xi \mapsto \xi \cdot 2$ göndermesi kesin artan mıdır? Sürekli midir?

Alıştırma XXIV. Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

> Her α için, her β için, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ kanıtlayacağız.
>
> 1. $\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha$.
> 2. Eğer $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ise, o zaman
>
> $$\alpha + \beta' = (\alpha + \beta)' = (\beta + \alpha)' = \beta' + \alpha.$$
>
> 3. Eğer γ limit ve $\forall \xi \ (\xi < \gamma \Rightarrow \alpha + \xi = \xi + \alpha)$ ise, o zaman
>
> $$\alpha + \gamma = \sup_{\xi<\gamma}(\alpha + \xi) = \sup_{\xi<\gamma}(\xi + \alpha) = \gamma + \alpha.$$
>
> Bu şekilde her durumda $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Teorem 34. *Ordinal toplama birleşmelidir.*

Kanıt. Her γ için, tümevarım kullanarak tüm α ve β için

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

göstereceğiz.

1. $\alpha + (\beta + 0) = \alpha + \beta$ [(5.1) tanımından]
   $= (\alpha + \beta) + 0.$ [(5.1) tanımından]

2. Eğer

$$\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta \tag{5.6}$$

ise, o zaman

$$\begin{aligned}
\alpha + (\beta + \delta') &= \alpha + (\beta + \delta)' && [(5.2) \text{ tanımından}]\\
&= \big(\alpha + (\beta + \delta)\big)' && [(5.2) \text{ tanımından}]\\
&= \big((\alpha + \beta) + \delta\big)' && [(5.6) \text{ hipotezinden}]\\
&= (\alpha + \beta) + \delta'. && [(5.2) \text{ tanımından}]
\end{aligned}$$

3. δ limit olsun, ve

$$\forall \xi\ \big(\xi < \delta \Rightarrow \alpha + (\beta + \xi) = (\alpha + \beta) + \xi\big) \tag{5.7}$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
&(\alpha + \beta) + \delta\\
&= \sup_{\xi < \delta}\big((\alpha + \beta) + \xi\big) && [(5.3) \text{ tanımı}]\\
&= \sup_{\xi < \delta}\big(\alpha + (\beta + \xi)\big) && [(5.7) \text{ hipotezi}]\\
&= \alpha + \sup_{\xi < \delta}(\beta + \xi) && [\xi \mapsto \alpha + \xi \text{ normaldir}]\\
&= \alpha + (\beta + \delta). && [(5.3) \text{ tanımı}]
\end{aligned}$$

□

Teorem 35. *$k < \omega$ ve $\ell < \omega$ ise $\omega \cdot (k + \ell) = \omega \cdot k + \omega \cdot \ell$.*

Alıştırma XXV. Teoremi kanıtlayın. (Tümevarım kullanın.)

Teorem 36. *Her $\xi \mapsto \xi + \alpha$ göndermesi artandır.*

Kanıt. $\beta \leqslant \gamma$ olsun. α üzerinden tümevarım kullanarak

$$\beta + \alpha \leqslant \gamma + \alpha$$

kanıtlayacağız.

1. $\beta + 0 = \beta \leqslant \gamma = \gamma + 0$.
2. $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$ ise tabii ki

$$\beta + \alpha' = (\beta + \alpha)' = (\gamma + \alpha)' = \gamma + \alpha'.$$

$\beta + \alpha < \gamma + \alpha$ ise, Teorem 23'e göre

$$\beta + \alpha' = (\beta + \alpha)' \leqslant \gamma + \alpha < (\gamma + \alpha)' = \gamma + \alpha'.$$

3. Eğer δ limit ise

$$\forall \xi \ (\xi < \delta \Rightarrow \beta + \xi < \gamma + \xi)$$

olsun. O zaman

$$\beta + \delta = \sup_{\xi < \delta} (\beta + \xi) \leqslant \sup_{\xi < \delta} (\gamma + \xi) = \gamma + \delta.$$ □

5.2 Hesaplamalar

Bu altbölümün teoremleri tümevarım kullanmaz.

Teorem 37. *$k < \omega$ ise $k + \omega = \omega$. (Şekil 3'e bakın.)*

Kanıt. $k + \omega = \sup_{i<\omega}(k + i) = \omega$. □

Sonuç. *$k < \omega$ ve $1 \leqslant n < \omega$ ise*

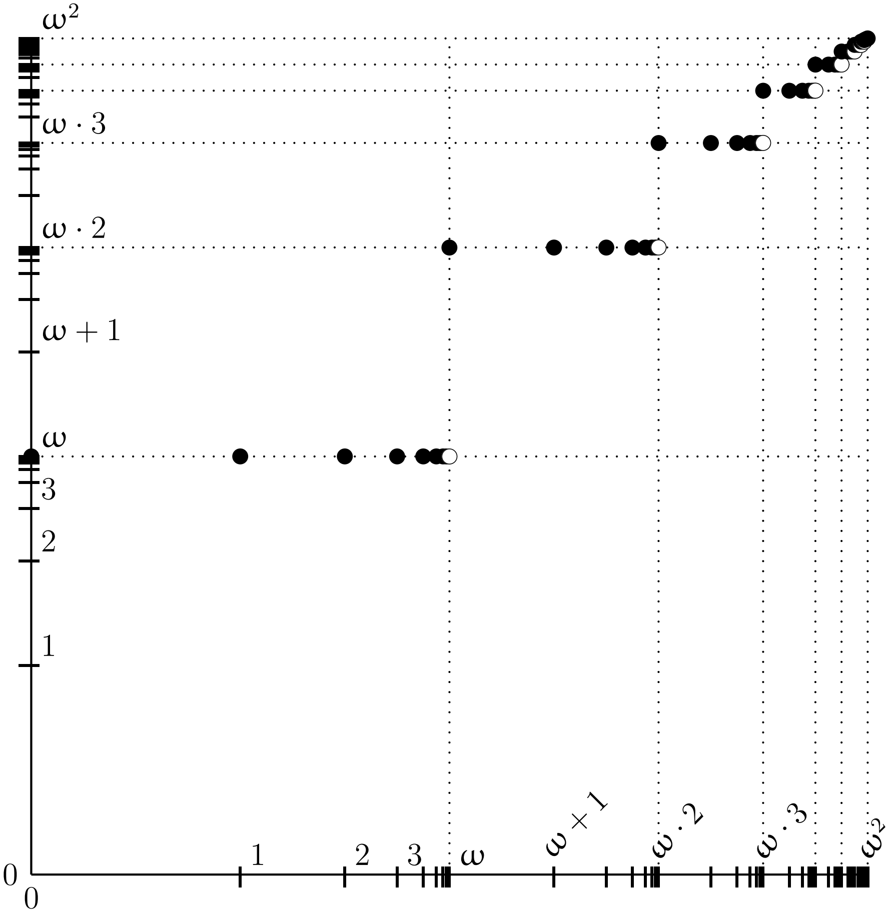
$$k + \omega \cdot n = \omega \cdot n.$$

Alıştırma XXVI. Sonucu kanıtlayın.

Teorem 38 (Çıkarma). *$\alpha \leqslant \beta$ ise*

$$\alpha + \xi = \beta \tag{5.8}$$

denkleminin bir ve tek bir çözümü vardır.



Şekil 3: $\eta = \xi + \omega$ denkleminin grafiği

Kanıt. Denklemin çözümü varsa, Teorem 33'e göre tek çözüm vardır.

Teoremler 32 ve 36'dan $\alpha + \beta \geqslant \beta$, dolayısıyla $\{\xi \colon \alpha + \xi \leqslant \beta\}$ sınıfının β' üstsınırı vardır. Şimdi γ, sınıfının supremumu olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\alpha + \gamma &= \alpha + \sup_{\alpha+\xi\leqslant\beta} \xi \\ &= \sup_{\alpha+\xi\leqslant\beta} (\alpha + \xi) \leqslant \beta, \\ (\alpha + \gamma)' &= \alpha + \gamma' > \beta,\end{aligned}$$

dolayısıyla $\alpha + \gamma = \beta$. □

Alıştırma XXVII. $\alpha \leqslant \beta$ varsayınca, $\{\xi \colon a + \xi \geqslant \beta\}$ sınıfının boş olmayıp sınıfın en küçük elemanının (5.8) denkleminin çözümü olduğunu gösterin.

Teorem 39. *Eğer* $\alpha < \omega^2$ *ise, o zaman bir ve tek bir şekilde*

$$\alpha = \omega \cdot k + m. \tag{5.9}$$

Kanıt. $\omega^2 = \sup_{i<\omega} \omega \cdot i$ olduğundan

$$\{i \colon \alpha < \omega \cdot i\}$$

kümesi boş değildir. Ayrıca küme 0'ı içermez çünkü $\omega \cdot 0 = 0$. Sonuç olarak bir k için

$$\begin{gathered}k + 1 = \min\{i \colon \alpha < \omega \cdot i\}, \\ \omega \cdot k \leqslant \alpha < \omega \cdot (k + 1).\end{gathered}$$

Teorem 38 sayesinde bir m için (5.9) doğrudur. Şimdi bazı ℓ ve n için $\beta = \omega \cdot \ell + n$ olsun. Eğer $k < \ell$ ise, o zaman $\alpha < \beta$. Eğer $k = \ell$ ama $m < n$ ise, o zaman $\alpha < \beta$. □

ω^2 kümesi toplama altında kapalıdır, ve toplama kuralı,

$$(\omega \cdot k + \ell) + (\omega \cdot m + n) = \omega \cdot (k + m) + n.$$

Alıştırma XXVIII. $\alpha = \omega \cdot 17 + 6$ ve $\beta = \omega \cdot 1000 + 5$ ise $\alpha + \beta$ toplamını hesaplayın.

6 Ordinal çarpma

6.1 Tanım ve özellikler

Özyineli tanıma göre her α için

$$\begin{aligned} \alpha\cdot 0 &= 0,\\ \alpha\cdot\beta' &= \alpha\cdot\beta+\alpha,\\ \gamma \text{ limit ise } \alpha\cdot\gamma &= \sup_{\xi<\gamma}\alpha\cdot\xi. \end{aligned}$$

Ordinal çarpma hakkında ilk teoremimizin bir şıkkı tümevarım kullanmaz; kalanlar tümevarım kullanıyor.

Teorem 40.

1. $\alpha\cdot 1=\alpha$.
2. $1\cdot\alpha=\alpha$.
3. $0\cdot\alpha=0$.

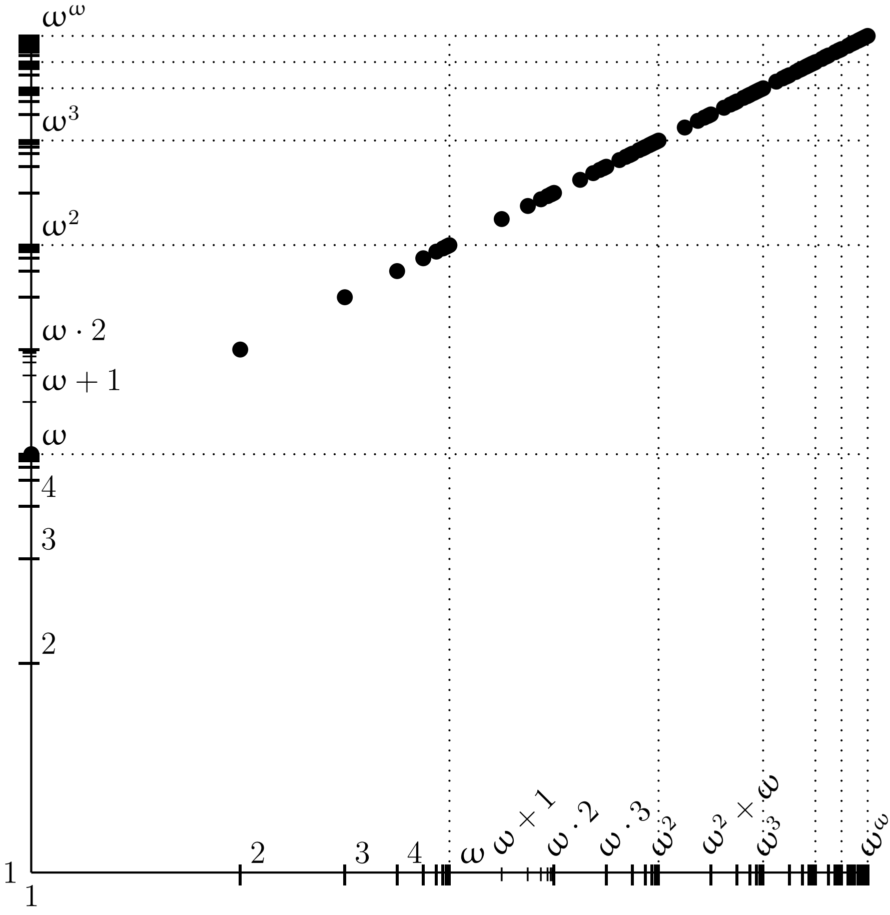
Alıştırma XXIX. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 41. *$\alpha\geqslant 1$ ise $\xi\mapsto\alpha\cdot\xi$ işlemi normaldir.*

Alıştırma XXX. Teoremi kanıtlayın.

Örneğin Şekil 4'e bakın. Şekilde

$$\omega^2=\omega\cdot\omega,\qquad \omega^3=\omega^2\cdot\omega,\qquad \omega^4=\omega^3\cdot\omega,$$



Şekil 4: $\eta = \omega \cdot \xi$ denkleminin grafiği

ve genelde, Teorem 17'yi kullanan resmi özyineli tanıma göre,

$$\alpha^0 = 1, \qquad \alpha^1 = \alpha, \qquad \alpha^{k+1} = \alpha^k \cdot \alpha.$$

Ayrıca

$$\omega^\omega = \sup_{i<\omega}(\omega^i).$$

Alıştırma XXXI. $\xi \mapsto \xi^2$ göndermesi kesin artan mıdır? Sürekli midir?

Teorem 42. *Ordinal çarpma, toplama üzerine soldan dağılır.*

Kanıt. Ordinal tümevarım ile

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \tag{6.1}$$

kanıtlayacağız.

1. $\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + 0 = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0$.
2. Eğer (6.1) doğru ise, o zaman

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (\beta + \gamma') &= \alpha \cdot (\beta + \gamma)' \\ &= \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \\ &= (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma) + \alpha \\ &= \alpha \cdot \beta + (\alpha \cdot \gamma + \alpha) \\ &= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma'.\end{aligned}$$

3. Şimdi γ limit ve

$$\forall \xi \; (\xi < \gamma \Rightarrow \alpha \cdot (\beta + \xi) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \xi)$$

olsun. Eğer $\alpha = 0$ ise, iddia apaçıktır, dolayısıyla $\alpha > 0$ varsayacağız.

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \sup_{\xi<\gamma}(\beta + \xi) \qquad [\text{tanım}]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\xi<\gamma}\bigl(\alpha\cdot(\beta+\xi)\bigr) && [\eta\mapsto\alpha\cdot\eta \text{ normaldir}]\\
&= \sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\xi) && [\text{tümevarım hipotezi}]\\
&= \alpha\cdot\beta+\sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\xi) && [\eta\mapsto\alpha\cdot\beta+\eta \text{ normaldir}]\\
&= \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma. && [\text{tanım}]
\end{aligned}
$$
□

Alıştırma XXXII. Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

1. $0\cdot(\beta+\gamma)=0=0+0=0\cdot\beta+0\cdot\gamma$.
2. Eğer (6.1) doğru ise, o zaman

$$
\begin{aligned}
\alpha'\cdot(\beta+\gamma) &= \alpha\cdot(\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)\\
&= (\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma)+(\beta+\gamma)\\
&= (\alpha\cdot\beta+\beta)+(\alpha\cdot\gamma+\gamma)\\
&= \alpha'\cdot\beta+\alpha'\cdot\gamma.
\end{aligned}
$$

3. Eğer α limit ve $\forall\xi\ \bigl(\xi<\alpha\Rightarrow\xi\cdot(\beta+\gamma)=\xi\cdot\beta+\xi\cdot\gamma\bigr)$ ise

$$
\begin{aligned}
\alpha\cdot(\beta+\gamma) &= \sup_{\xi<\alpha}\bigl(\xi\cdot(\beta+\gamma)\bigr)\\
&= \sup_{\xi<\alpha}\bigl(\xi\cdot\beta+\xi\cdot\gamma)\\
&= \sup_{\xi<\alpha}(\xi\cdot\beta)+\sup_{\xi<\alpha}(\xi\cdot\gamma)\\
&= \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma.
\end{aligned}
$$

Alıştırma XXXIII. Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

1. $(\alpha+\beta)\cdot 0=0=0+0=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0$.
2. Eğer $(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$ ise, o zaman

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)\cdot\gamma' &= (\alpha+\beta)\cdot\gamma+(\alpha+\beta)\\
&= (\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma)+(\alpha+\beta)\\
&= (\alpha\cdot\gamma+\alpha)+(\beta\cdot\gamma+\beta)\\
&= \alpha\cdot\gamma'+\beta\cdot\gamma'.
\end{aligned}
$$

3. Eğer γ limit ve $\forall\xi\ \big(\xi < \gamma \Rightarrow (\alpha+\beta)\cdot\xi = \alpha\cdot\xi+\beta\cdot\xi\big)$ ise

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\cdot\gamma &= \sup_{\xi<\gamma}\big((\alpha+\beta)\cdot\xi\big)\\ &= \sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\xi+\beta\cdot\xi)\\ &= \sup_{\xi<\gamma}(\alpha\cdot\xi)+\sup_{\xi<\gamma}(\beta\cdot\xi)\\ &= \alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma.\end{aligned}$$

Teorem 43. *Ordinal çarpma birleşmelidir.*

Alıştırma XXXIV. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 44. $\alpha^{k+\ell} = \alpha^k\cdot\alpha^\ell$.

Alıştırma XXXV. Teoremi kanıtlayın. (Tümevarım kullanın.)

Teorem 45. *Her* $\xi \mapsto \xi\cdot\alpha$ *işlemi artandır.*

Alıştırma XXXVI. Teoremi kanıtlayın.

6.2 Hesaplamalar

Lemma 6. $0 < \ell$ *ise* $1+\omega^\ell = \omega^\ell$.

Alıştırma XXXVII. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 46. $k < m$ *ise* $\omega^k+\omega^m = \omega^m$.

Kanıt. Bir ℓ için, $k+\ell = m$ ve $0 < \ell < \omega$, dolayısıyla

$$\begin{aligned}\omega^k+\omega^m &= \omega^k+\omega^{k+\ell}\\ &= \omega^k+\omega^k\cdot\omega^\ell\\ &= \omega^k\cdot(1+\omega^\ell)\\ &= \omega^k\cdot\omega^\ell\\ &= \omega^{k+\ell}\\ &= \omega^m.\end{aligned}$$ □

Teorem 47. *$0 < k$ ise $k \cdot \omega = \omega$. (Şekil 5'e bakın.)*

Alıştırma XXXVIII. Teoremi kanıtlayın.

Lemma 7.

(a) Eğer $0 < \alpha < \omega^\omega$ ise, o zaman bir ve tek bir k için

$$\omega^k \leqslant \alpha < \omega^{k+1}.$$

(b) Bu durumda bir ve tek bir m için

$$\omega^k \cdot m \leqslant \alpha < \omega^k \cdot (m+1);$$

ayrıca $m > 0$.

Alıştırma XXXIX. Lemmayı kanıtlayın. Teorem 39'un kanıtına bakın.

Teorem 48. *Eğer $0 < \alpha < \omega^\omega$ ise, o zaman bir ve tek bir şekilde*

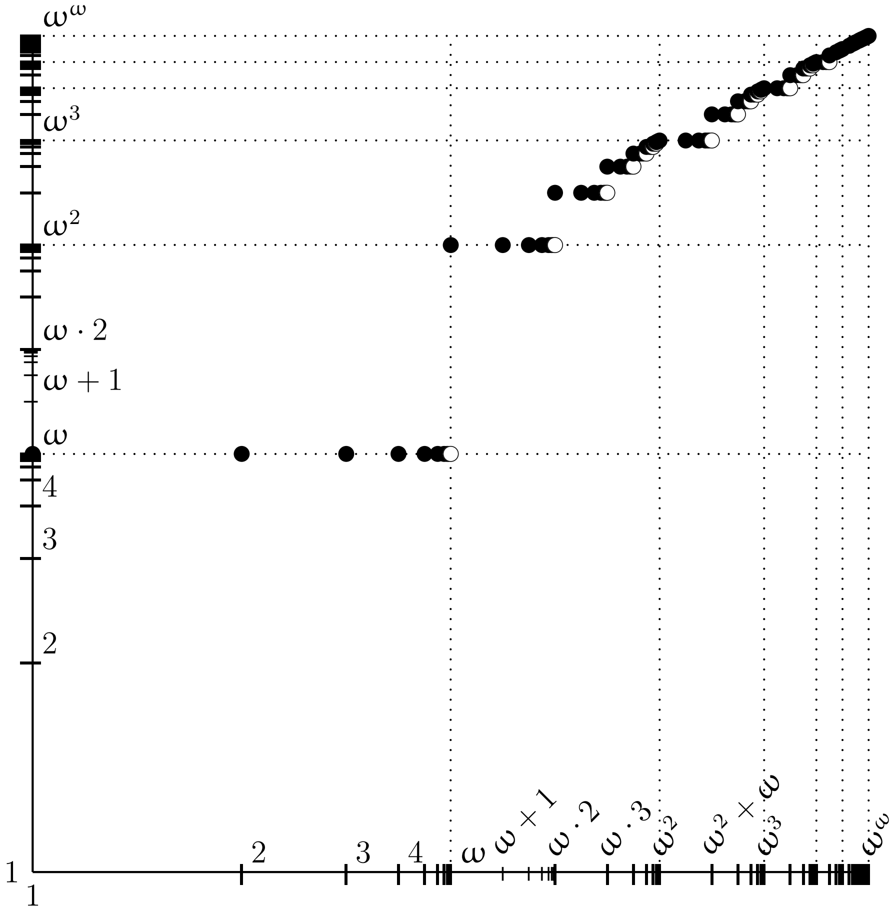
$$\begin{gathered}\alpha = \omega^{k_0} \cdot m_0 + \cdots + \omega^{k_n} \cdot m_n, \\ k_0 > \cdots > k_n, \\ \bigwedge_{i \leqslant n} m_i > 0.\end{gathered} \tag{6.2}$$

Alıştırma XL. Teoremi kanıtlayın.

(6.2) eşitliğindeki toplam, α'nın **Cantor normal biçimidir.** Ayrıca 0'ın Cantor normal biçimi 0'dır.

Lemma 8. *$\alpha < \omega^m$ ise $\alpha + \omega^m = \omega^m$.*

Kanıt. α'nın Cantor normal biçimini yazın ve Teorem 46'yı kullanın. □



Şekil 5: $\eta = \xi \cdot \omega$ denkleminin grafiği

Teorem 49. *$\alpha < \omega^m$, $n > 0$, ve $k > 0$ ise*

$$(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot k = \omega^m \cdot n \cdot k + \alpha.$$

Alıştırma XLI. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 50. *$\alpha < \omega^m$, $n > 0$, ve $k > 0$ ise*

$$(\omega^m \cdot n + \alpha) \cdot \omega^k = \omega^{m+k}.$$

Alıştırma XLII. Teoremi kanıtlayın.

Örneğin

$$\begin{gathered}(\omega^5 \cdot 10 + \omega^3 \cdot 8 + \omega) \cdot 6 = \omega^5 \cdot 60 + \omega^3 \cdot 8 + \omega,\\ (\omega^5 \cdot 10 + \omega^3 \cdot 8 + \omega) \cdot \omega = \omega^6,\\ (\omega^5 \cdot 10 + \omega^3 \cdot 8 + \omega) \cdot \omega^{10} = \omega^{15}.\end{gathered}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}&(\omega^3 \cdot 4 + \omega \cdot 6) \cdot (\omega^2 \cdot 3 + 8)\\ &= (\omega^3 \cdot 4 + \omega \cdot 6) \cdot \omega^2 \cdot 3 + (\omega^3 \cdot 4 + \omega \cdot 6) \cdot 8\\ &= \omega^5 \cdot 3 + \omega^3 \cdot 32 + \omega \cdot 6.\end{aligned}$$

Alıştırma XLIII. $(\omega^9 \cdot 9 + \omega^2 \cdot 9 + \omega \cdot 9 + 9) \cdot (\omega^2 \cdot 9 + \omega \cdot 9 + 9)$ çarpımının Cantor normal biçimini hesaplayın.

7 Ordinal kuvvet alma

7.1 Tanım ve özellikler

Özyineli tanıma göre her α için

$$\alpha^0 = 1,$$
$$\alpha^{\beta'} = \alpha^\beta \cdot \alpha,$$
$$\gamma \text{ limit ise } \alpha^\gamma = \sup_{0<\xi<\gamma} (\alpha^\xi).$$

Teorem 51. *$\alpha^1 = \alpha$, $1^\alpha = 1$, ve*

$$0^\alpha = \begin{cases} 1, & \alpha = 0 \text{ durumunda}, \\ 0, & \alpha > 0 \text{ durumunda}. \end{cases}$$

Alıştırma XLIV. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 52. *$\alpha \geqslant 2$ ise $\xi \mapsto \alpha^\xi$ işlemi, normaldir.*

Alıştırma XLV. Teoremi kanıtlayın.

Şekil 6'ya bakın. Şekilde

$$\varepsilon_0 = \sup \left\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\right\}.$$

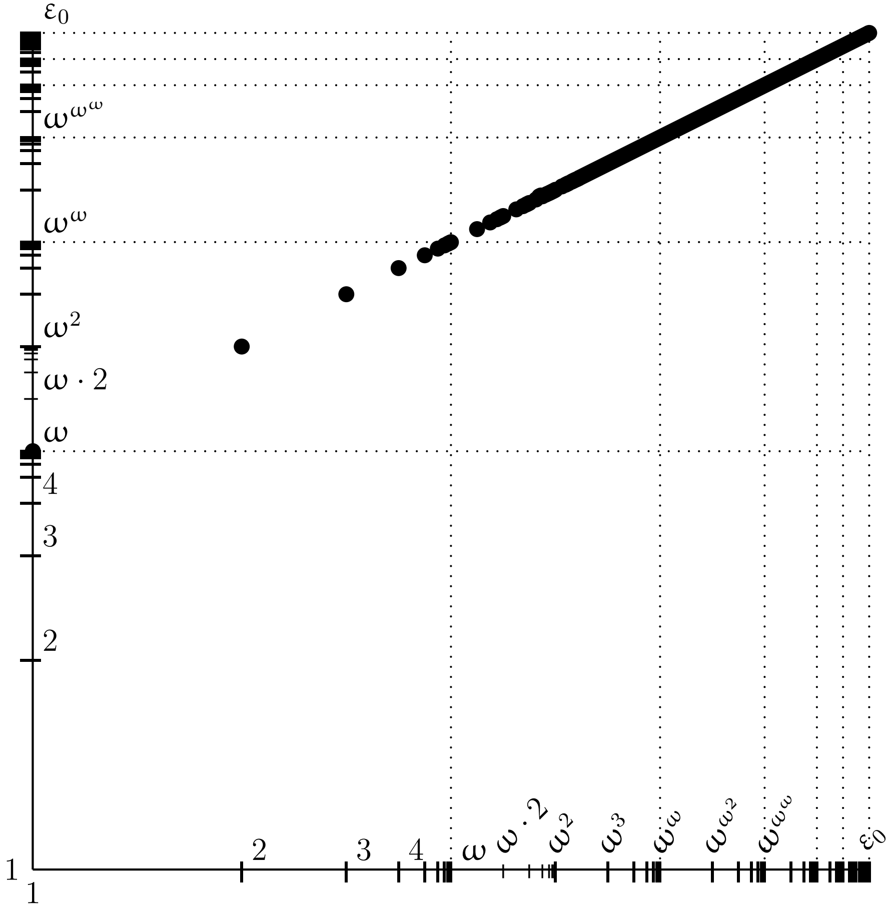
Alıştırma XLVI. $\xi \mapsto \xi^\xi$ işlemi kesin artan mıdır? Sürekli midir?

Teorem 53. *$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$ ve $\alpha^{\beta\cdot\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$.*

Alıştırma XLVII. Teoremi kanıtlayın.

Teorem 54. *$\alpha \geqslant 1$ ise $\xi \mapsto \xi^\alpha$ artandır.*

Alıştırma XLVIII. Teoremi kanıtlayın.



Şekil 6: $\eta = \omega^\xi$ denkleminin grafiği

7.2 Hesaplamalar

Lemma 9. *Her α için $\alpha \leqslant \omega^{\alpha} < \omega^{\alpha+1}$.*

Alıştırma XLIX. Lemmayı kanıtlayın. Tümevarım kullanılabilir.

Lemma 10.

1. *Eğer $0 < \alpha$ ise, o zaman bir ve tek bir β için*

$$\omega^{\beta} \leqslant \alpha < \omega^{\beta+1}.$$

2. *Bu durumda bir ve tek bir m için*

$$\omega^{\beta} \cdot m \leqslant \alpha < \omega^{\beta} \cdot (m+1);$$

ayrıca $m > 0$.

Alıştırma L. Lemmayı kanıtlayın. Lemma 7'ye bakın.

Teorem 55. *Eğer $0 < \alpha$ ise, o zaman bir ve tek bir şekilde*

$$\begin{gathered} \alpha = \omega^{\beta_0} \cdot m_0 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot m_n, \qquad (7.1) \\ \beta_0 > \cdots > \beta_n, \\ \bigwedge_{i \leqslant n} m_i > 0. \end{gathered}$$

Alıştırma LI. Teoremi kanıtlayın.

(7.1) eşitliğindeki toplam, α'nın **Cantor normal biçimidir.**

Lemma 11. $\alpha < \omega^{\beta}$ *ise* $\alpha + \omega^{\beta} = \omega^{\beta}$.

Alıştırma LII. Lemmayı kanıtlayın. (Lemma 8'e bakın.)

Teorem 56. *$\alpha < \omega^\beta$, $n > 0$, ve $k > 0$ ise*

$$(\omega^\beta \cdot n + \alpha) \cdot k = \omega^\beta \cdot n \cdot k + \alpha.$$

Alıştırma LIII. Sonucu kanıtlayın.

Teorem 57. *$\alpha < \omega^\beta$, $n > 0$, ve $1 \leqslant \gamma$ ise*

$$(\omega^\beta \cdot n + \alpha) \cdot \omega^\gamma = \omega^{\beta+\gamma}.$$

Alıştırma LIV. Teoremi kanıtlayın.

Şimdi iki Cantor normal biçiminin çarpımının Cantor normal biçimini hesaplayabiliriz.

Teorem 58. *$0 < k$ ve $\omega \leqslant \alpha$ ise*

$$k^{\omega^{n+1}} = \omega^{\omega^n}, \qquad k^{\omega^\alpha} = \omega^{\omega^\alpha}.$$

Alıştırma LV. Teoremi kanıtlayın.

Lemma 12. *Ardıl olmayan her α için, bir β için,*

$$\alpha = \omega \cdot \beta.$$

Alıştırma LVI. Lemmayı kanıtlayın.

Teorem 59. *$\alpha < \omega^\beta$, $n > 0$, ve γ limit ise*

$$(\omega^\beta \cdot n + \alpha)^\gamma = \omega^{\beta \cdot \gamma}.$$

Alıştırma LVII. Teoremi kanıtlayın.

8 Kardinaller

8.1 Eşlemeler

Eğer $f\colon A \to B$ ise, üç özel durum vardır.

1. Eğer $\forall x_0\ \forall x_1\ (f(x_0) = f(x_1) \Rightarrow x_0 = x_1)$ ise, o zaman f **birebirdir,** bir **gömmedir,** ve A'yı B'ye **gömür.** Bu durumda
   $$\boxed{A \preccurlyeq B}$$
   yazılır.
2. Eğer $f[A] = B$ ise, o zaman f, B'yi **örter.**
3. Eğer f hem birebirdir hem de B'yi örter ise, o zaman A ve B arasında f bir **eşlemedir.** Bu durumda A ve B **eşleniktir** ve
   $$\boxed{A \approx B}$$
   yazılır.

Teorem 60 (Schröder–Bernstein)**.** *$A \preccurlyeq B$ ve $B \preccurlyeq A$ ise*

$$A \approx B.$$

Kanıt. $f\colon A \xrightarrow{\preccurlyeq} B$ ve $g\colon B \xrightarrow{\preccurlyeq} A$ olsun. Özyinelemeyle

$$\begin{aligned} A_0 &= A, & A_{n+1} &= g[B_n], \\ B_0 &= B, & B_{n+1} &= f[A_n] \end{aligned}$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned} f[A_0 \smallsetminus A_1] &= B_1 \smallsetminus B_2, \\ g[B_0 \smallsetminus B_1] &= A_1 \smallsetminus A_2, \end{aligned}$$

dolayısıyla $A_0 \smallsetminus A_2 \approx B_0 \smallsetminus B_2$. Benzer şekilde

$$A_n \smallsetminus A_{n+2} \approx B_n \smallsetminus B_{n+2},$$

dolayısıyla

$$A \smallsetminus \bigcap_{i<\omega} A_i \approx B \smallsetminus \bigcap_{i<\omega} B_i.$$

Ayrıca

$$f\left[\bigcap_{i<\omega} A_i\right] = \bigcap_{i<\omega} f[A_i] = \bigcap_{0<i<\omega} B_i = \bigcap_{i<\omega} B_i,$$

dolayısıyla $\bigcap_{i<\omega} A_i \approx \bigcap_{i<\omega} B_i$, ve sonuç olarak $A \approx B$. ☐

8.2 Kardinaller

Eğer bir A kümesi bir ordinal ile eşlenik ise, o zaman tanıma göre

$$\operatorname{kard}(A) = \min\{\xi \colon \xi \approx A\}.$$

Bu ordinal, A'nın **kardinalidir.** Şimdi

$$\mathbf{KN} = \operatorname{kard}[\mathbf{ON}] = \{\xi \colon \forall\eta\ (\xi \approx \eta \Rightarrow \xi \leqslant \eta)\}$$

olsun.

Teorem 61. $\xi \mapsto \operatorname{kard}(\xi)$ *artandır.*

Kanıt. Eğer $\alpha \leqslant \beta$ ama $\operatorname{kard}(\beta) \leqslant \operatorname{kard}(\alpha)$ ise, o zaman

$$\alpha \preccurlyeq \beta \approx \operatorname{kard}(\beta) \preccurlyeq \operatorname{kard}(\alpha) \approx \alpha,$$

dolayısıyla $\alpha \approx \beta$ ve $\operatorname{kard}(\alpha) \leqslant \operatorname{kard}(\beta)$. □

Teorem 62. $k < \omega$ *ise* $\operatorname{kard}(k) = k$*.*

Alıştırma LVIII. Teoremi kanıtlayın.

κ ve λ, her zaman kardinal olsun.

8.3 Kardinal Toplama ve Çarpma

Tanıma göre

$$\kappa \oplus \lambda = \operatorname{kard}(\kappa + \lambda), \qquad \kappa \otimes \lambda = \operatorname{kard}(\kappa \cdot \lambda).$$

Ordinal toplama ve çarpma birleşmeli olduğundan kardinal işlemler de birleşmelidir.

Tanıma göre

$$\begin{aligned} A \times B &= \big\{z \colon \exists x\ \exists y\ \big(z = (x, y) \wedge x \in A \wedge y \in B\big)\big\} \\ &= \{(x, y) \colon x \in A \wedge y \in B\}. \end{aligned}$$

Bu küme, A ve B'nin **Kartezyan çarpımıdır.** Şimdi

$$A \sqcup B = (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$$

olsun; bu bileşim, A ve B'nin **ayrık bileşimidir.** Özel olarak $A \sqcup A = A \times 2$.

Lemma 13. *Her α ve her β için*

$$\alpha \sqcup \beta \approx \alpha + \beta, \qquad \alpha \times \beta \approx \alpha \cdot \beta.$$

Kanıt. Eğer

$$f(\xi, i) = \alpha \cdot i + \xi, \qquad g(\xi, \eta) = \alpha \cdot \eta + \xi$$

ise, o zaman

$$f\colon \alpha \sqcup \beta \overset{\approx}{\to} \alpha + \beta, \qquad f\colon \alpha \times \beta \overset{\approx}{\to} \alpha \cdot \beta. \qquad \square$$

Teorem 63. *Her α ve her β için*

$$\alpha + \beta \approx \beta + \alpha, \qquad \alpha \cdot \beta \approx \beta \cdot \alpha.$$

Alıştırma LIX. Teoremi kanıtlayın.

Sonuç. **KN**'*de $\oplus$ ve $\otimes$ değişmelidir.*

Lemma 14. $t_i = i \cdot (i+1)/2$ *olmak üzere*

$$(i, j) \mapsto t_{i+j} + i\colon \omega \times \omega \overset{\approx}{\to} \omega.$$

Lemma 15. *Her sonsuz κ için, bir α için,*

$$\kappa = \omega^{\alpha}.$$

Kanıt. Teorem 55'e göre bir β, bir γ, ve $\mathbb{N}$'de bir n için

$$\gamma < \omega^{\beta}, \qquad \kappa = \omega^{\beta} \cdot n + \gamma.$$

O zaman Lemma 13'e göre $\kappa \approx \gamma + n \cdot \omega^{\beta}$, dolayısıyla Teorem 57'ye göre

$$\kappa \approx \omega^{\beta}.$$

Eğer $\alpha = \min\{\xi\colon \omega^{\xi} \approx \kappa\}$ ise, o zaman $\kappa = \omega^{\alpha}$. $\square$

Lemma 16. *Eğer $\alpha > 0$ ise, o zaman $\omega^{\alpha} \times \omega^{\alpha} \approx \omega^{\alpha}$.*

Kanıt. Lemma 14'teki gibi $f(i,j) = t_{i+j} + i$ olsun. O zaman $f(0,0) = 0$. Bir n için, eğer

$$\begin{gathered}
\alpha_0 > \cdots > \alpha_{n-1}, \\
\{b_0, \dots, b_{n-1}\} \subset \omega, \\
\{c_0, \dots, c_{n-1}\} \subset \omega, \\
0 < \operatorname{maks}(b_0, c_0) < \omega \land \cdots \land 0 < \operatorname{maks}(b_{n-1}, c_{n-1}) < \omega, \\
\beta = \omega^{\alpha_0} \cdot b_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{n-1}} \cdot b_{n-1}, \\
\gamma = \omega^{\alpha_0} \cdot c_1 + \cdots + \omega^{\alpha_{n-1}} \cdot c_{n-1}
\end{gathered}$$

ise

$$\boldsymbol{F}(\beta, \gamma) = \omega^{\alpha_0} \cdot f(b_0, c_0) + \cdots + \omega^{\alpha_{n-1}} \cdot f(b_{n-1}, c_{n-1})$$

olsun. O zaman $\boldsymbol{F}$ birebirdir ve $\boldsymbol{F}[\omega^\alpha \times \omega^\alpha] = \omega^\alpha$. □

Teorem 64. *Eğer* $2 \leqslant \min(\kappa, \lambda)$ *ve* $\omega \leqslant \operatorname{maks}(\kappa, \lambda)$ *ise, o zaman*

$$\kappa \oplus \lambda = \kappa \otimes \lambda = \operatorname{maks}(\kappa, \lambda).$$

Kanıt. $\kappa \geqslant \lambda$ ise

$$\kappa \leqslant \kappa \oplus \lambda \leqslant \kappa \oplus \kappa \leqslant \kappa \otimes 2 \leqslant \kappa \otimes \lambda \leqslant \kappa \otimes \kappa.$$ □

Tanım kümesi A olan, değer kümesi B'nin bir altkümesi olan göndermeler

$$\boxed{{}^{A}B}$$

kümesini oluştursun.

Teorem 65. ${}^{A}2 \approx \mathscr{P}(A)$.

Alıştırma LX. Teoremi kanıtlayın.

Eğer $f \in {}^{A}B$ ve $C \subseteq A$ ise

$$f \restriction C = \big\{\big(x, f(x)\big) \colon x \in C\big\}$$

olsun. O zaman $f \restriction C \in {}^{C}B$.

Lemma 17. *$0 < n < \omega \leqslant \alpha$ ise ${}^{n}\alpha \approx \alpha$.*

Kanıt. Teorem 64'e göre bir f için

$$f \colon \alpha \times \alpha \xrightarrow{\approx} \alpha.$$

Eğer $g_n \colon {}^{n}\alpha \xrightarrow{\approx} \alpha$ ise, o zaman

$$x \mapsto f\big(g_n(x \restriction n), x(n)\big) \colon {}^{n+1}\alpha \xrightarrow{\approx} \alpha. \qquad \square$$

Lemma 18. *$\omega \leqslant \alpha$ ise $\bigcup_{i \in \omega} {}^{i}\alpha \approx \alpha$.*

Kanıt. Lemma 17'nin *kanıtından* bir $i \mapsto g_i$ için ω'da her n için

$$g_n \colon {}^{n}\alpha \xrightarrow{\preccurlyeq} \alpha.$$

Bir f için eğer $a \colon n \to \alpha$ ise, o zaman $f(a) = \big(n, g_n(a)\big)$. Bu şekilde

$$f \colon \bigcup_{i \in \omega} {}^{i}\alpha \xrightarrow{\preccurlyeq} \omega \times \alpha. \qquad \square$$

Şimdi herhangi A kümesi için $n \in \omega$ olmak üzere

$$\mathscr{P}_n(A) = \{X \in \mathscr{P}(A) \colon \operatorname{kard}(X) = n\}$$

olsun, ve ondan sonra

$$\mathscr{P}_\omega(A) = \bigcup_{i \in \omega} \mathscr{P}_i(A)$$

olsun.

Lemma 19. *$\omega \leqslant \kappa$ ise $\mathscr{P}_\omega(\kappa) \approx \kappa$.*

Kanıt. İlk olarak

$$\xi \mapsto \{\xi\} \colon \kappa \xrightarrow{\approx} \mathscr{P}_1(\kappa).$$

Bu eşlemenin tersi f_1 olsun. Ayrıca $g \colon \kappa \times \kappa \xrightarrow{\approx} \kappa$ olsun. Eğer

$$f_m \colon \mathscr{P}_m(\kappa) \xrightarrow{\approx} \kappa$$

ise, o zaman

$$(X, \xi) \mapsto g(f_m(X), \xi) \colon \mathscr{P}_m(\kappa) \times \kappa \xrightarrow{\approx} \kappa.$$

Ayrıca

$$(X, \xi) \mapsto X \cup \{\text{maks}(X) + \xi\} \colon \mathscr{P}_m(\kappa) \times \kappa \xrightarrow{\approx} \mathscr{P}_{m+1}(\kappa),$$

dolayısıyla öyle bir f_{m+1} elde edilebilir ki

$$f_{m+1} \colon \mathscr{P}_{m+1}(\kappa) \xrightarrow{\approx} \kappa.$$

Lemma 18'in kanıtındaki gibi $\mathscr{P}_\omega(\kappa) \preccurlyeq \kappa$. ☐

Teorem 66. *α ve β sonsuz ise*

$$\text{kard}(\beta^\alpha) = \text{maks}(\text{kard}(\alpha), \text{kard}(\beta)).$$

Kanıt. Eğer $\gamma < \omega^\alpha$ ve Cantor normal biçiminde

$$\gamma = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_{n-1}} \cdot a_{n-1}$$

ise,

$$f(\gamma) = (i \mapsto a_i, \{\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}\}\}$$

olsun. Bu şekilde

$$f \colon \omega^\alpha \xrightarrow{\approx} \bigcup_{i \in \omega} {}^i\omega \times \mathscr{P}_\omega(\alpha),$$

dolayısıyla Lemmalar 18 ve 19'dan

$$\text{kard}(\omega^\alpha) = \text{kard}(\omega) \otimes \text{kard}(\alpha).$$

Teorem 55'te, dolayısıyla yukarıda da, ω'nın yerine β konulabilir. ☐

8.4 Sayılamaz kümeler

Eğer $A \preccurlyeq \omega$ ise, o zaman A **sayılabilir;** diğer durumda A **sayılamaz.** Gördüğümüz gibi sayılabilir kümelerden ordinal toplama, çarpma, ve kuvvet alma ile sayılamaz kümeler elde edilemez.

$\mathscr{P}(\mathbf{V}) = \mathbf{V}$ ama $n \in \omega$ ise

$$n < 2^n = \operatorname{kard}(\mathscr{P}(n)).$$

Teorem 67 (Cantor)**.** *Her A kümesi için*

$$A \preccurlyeq \mathscr{P}(A) \land A \not\approx \mathscr{P}(A).$$

Kanıt. $x \mapsto \{x\} \colon A \xrightarrow{\preccurlyeq} \mathscr{P}(A)$. Şimdi $f \colon A \xrightarrow{\preccurlyeq} \mathscr{P}(A)$ ise

$$B = \{x \in A \colon x \notin f(x)\}$$

olsun. O zaman A'nın her c elemanı için

$$c \in B \Leftrightarrow c \notin f(c),$$

dolayısıyla $B \neq f(c)$. Bu şekilde f, eşleme olamaz. □

Alıştırma LXI. Cantor Teoreminin kanıtı A'nın küme olduğunu nasıl kullanır?

Aksİyom 8 (Kuvvet Kümesi)**.** *Her A kümesi için $\mathscr{P}(A)$ sınıfı bir kümedir.*

Şu anda A'nın sonsuz olduğu $\mathscr{P}(A)$ kümesinin kardinali var olup olmadığını bilmiyoruz.

Teorem 68. *$A \times B \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$, dolayısıyla kümedir.*

Alıştırma LXII. Teoremi kanıtlayın.

Tanıma göre

$$\kappa^+ = \{\xi \colon \xi \preccurlyeq \kappa\}$$

olsun.

Teorem 69 (Hartogs)**.** *$\kappa^+ \in \mathbf{KN}$, $\kappa^+ > \kappa$, ve*

$$\kappa^+ = \min\{\xi \in \mathbf{KN} \colon \kappa < \xi\}. \tag{8.1}$$

Kanıt. Eğer $f \colon \alpha \xrightarrow{\preccurlyeq} \kappa$ ise, o zaman

$$\big\{\big(f(\xi), f(\eta)\big) \colon \xi \leqslant \eta < \alpha\big\} \in \mathscr{P}(\kappa \times \kappa),$$

ve ayrıca elemandan α elde edilebilir. Bu şekilde κ^+, $\mathscr{P}(\kappa \times \kappa)$'nın bir altkümesinin bir imgesidir, dolayısıyla κ^+ da bir kümedir.

Şimdi $\kappa^+ \subseteq \mathbf{ON}$ ve κ^+ geçişli olduğundan bir ordinaldir. Bu durumda $\kappa^+ \notin \kappa^+$ olduğundan $\kappa^+ > \kappa$, ve tanımlardan (8.1) çıkar. □

κ^+, κ'nın **kardinal ardılıdır.** Özyineli tanıma göre

$$\begin{gathered}\aleph_0 = \omega,\\ \aleph_{\alpha'} = (\aleph_\alpha)^+,\\ \alpha \text{ limit ise } \aleph_\alpha = \sup_{\xi<\alpha} \aleph_\xi.\end{gathered}$$

(Burada $\aleph$, İbrani *alef* harfidir.)

Teorem 70. *$\xi \mapsto \aleph_\xi$ normaldir ve imgesi $\mathbf{KN} \setminus \omega$.*

Alıştırma LXIII. Teoremi kanıtlayın.

8.5 Seçme

Gördüğümüz aksiyomlar, **Zermelo–Fraenkel** veya **ZF** aksiyomlarıdır. Şimdi bir aksiyom daha kullanacağız.

Aksİyom 9 (Seçim). *Her küme iyisıralanabilir.*

Gödel'in kanıtladığı bir teoreme göre, ZF aksiyomlarının bir *modelinde,* Seçim Aksiyomu (*Axiom of Choice*) doğrudur. Cohen'in kanıtladığı bir teoreme göre, ZF aksiyomlarının bir modelinde, Seçim Aksiyomu yanlıştır. Kısaca Seçim Aksiyomu, ZF'den bağımsızdır.

Seçim Aksiyomu ile ZF, **ZFC** olur. Şimdi her kümenin kardinali vardır. Örneğin tanıma göre

$$\lambda^{\kappa} = \mathrm{kard}({}^{\kappa}\lambda).$$

Bu kuvvet, ordinal küvvet değil, **kardinal kuvvettir.** Orneğin $\aleph_0 = \omega$ olduğu halde Teoremler 58, 65, ve 67'ye göre

$$\mathrm{kard}(2^{\omega}) = \aleph_0, \qquad 2^{\aleph_0} > \aleph_0.$$

Aşağıdaki kurallar kolaydır.

$$\begin{aligned} 0 < \lambda \Rightarrow 0^{\lambda} &= 0, \\ \kappa^0 &= 1, \\ 1^{\lambda} &= 1, \\ \kappa^1 &= \kappa, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \kappa^{\lambda \oplus \mu} &= \kappa^{\lambda} \otimes \kappa^{\mu}, \\ \kappa^{\lambda \otimes \mu} &= (\kappa^{\lambda})^{\mu}, \\ \kappa \leqslant \mu \wedge \lambda \leqslant \nu &\Rightarrow \kappa^{\lambda} \leqslant \mu^{\nu}. \end{aligned}$$

Teorem 71. *$2 \leqslant \kappa$, $1 \leqslant \lambda$, ve $\aleph_0 \leqslant \mathrm{maks}\{\kappa, \lambda\}$ olsun. O zaman*

$$\begin{aligned} \kappa \leqslant 2^{\lambda} &\Rightarrow \kappa^{\lambda} = 2^{\lambda}, \\ 2^{\lambda} < \kappa &\Rightarrow \kappa^{\lambda} \leqslant 2^{\kappa}. \end{aligned}$$

Kanıt. Hipoteze göre $\kappa \leqslant 2^\lambda$ ise $2 \leqslant \kappa \leqslant 2^\lambda$ ve λ sonsuzdur, dolayısıyla

$$2^\lambda \leqslant \kappa^\lambda \leqslant (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda\otimes\lambda} = 2^\lambda.$$

Ayrıca $2^\lambda < \kappa$ ise $\lambda \leqslant \kappa$, dolayısıyla κ sonsuzdur ve

$$\kappa^\lambda \leqslant (2^\kappa)^\lambda = 2^{\kappa\otimes\lambda} = 2^\kappa. \qquad \square$$

Örneğin

$$2 \leqslant \kappa \leqslant 2^{\aleph_0} < \mu \Rightarrow \kappa^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \leqslant \mu^{\aleph_0} \leqslant 2^\mu.$$

Şimdi aşağıdaki tanım yaparız.

$$\begin{gathered} \beth_0 = \aleph_0, \\ \beth_{\alpha'} = \operatorname{kard}(\mathscr{P}(\beth_\alpha)) = 2^{\beth_\alpha}, \\ \alpha \text{ limit ise } \beth_\alpha = \sup_{\xi<\alpha} \beth_\xi. \end{gathered}$$

(Burada $\beth$, İbrani *beth* harfidir.) O zaman $\xi \mapsto \beth_\xi$ normaldir, ve

$$\aleph_\alpha \leqslant \beth_\alpha.$$

Teorem 72. *Tüm κ ve λ için*

$$\begin{gathered} 2 \leqslant \kappa \leqslant \beth_{\alpha+1} \Rightarrow \kappa^{\beth_\alpha} = \beth_{\alpha+1}, \\ 1 \leqslant \lambda \leqslant \beth_\alpha \Rightarrow {\beth_{\alpha+1}}^\lambda = \beth_{\alpha+1}. \end{gathered}$$

Alıştırma LXIV. Teoremi kanıtlayın.

Kontinuum Hipotezi veya **KH,** $\aleph_1 = \beth_1$ önermesidir. **Genelleştirilmiş Kontinuum Hipotezi** veya **GKH,** $\forall\xi\ \aleph_\xi = \beth_\xi$ önermesidir. Gödel'in kanıtladığı teoreme göre, ZFC aksiyomlarının bir modelinde, GKH doğrudur. Cohen'in kanıtladığı teoreme göre, ZFC aksiyomlarının bir modelinde, KH yanlıştır. Bu şekilde KH, ZFC'den bağımsızdır.

9 Kofinallik

9.1 Tanım ve özellikler

Sonsuz bir κ kardinali limit ordinali olduğundan

$$\kappa = \sup_{\xi<\kappa} \xi = \bigcup_{\xi<\kappa} \xi.$$

Bazen bir kardinal, kendisinden küçük bir altkümenin supremumudur. Örneğin $\omega < \aleph_\omega$, ama

$$\aleph_\omega = \sup_{i\in\omega} \aleph_i.$$

Genelde α limit, $b \subseteq \alpha$, ve

$$\forall\xi\ \big(\xi < \alpha \Rightarrow \exists\eta\ (\eta \in b \land \xi < \eta)\big)$$

ise, b altkümesi, α ordinalinin **sınırsız** (*unbounded*) altkümesidir. Bu durumda

$$\alpha = \sup(b).$$

Örneğin her limit ordinali, kendisinde sınırsızdır. Ayrıca $\{\aleph_i \colon i \in \omega\}$, $\aleph_\omega$ ordinalinde sınırsızdır. Bir limit ordinalinin sınırsız altkümelerinin en küçük kardinaline, ordinalin **kofinalliği** (*cofinality*) denir, ve bu kardinal, $\mathrm{kf}(\alpha)$ olarak yazılabilir. Yani

$$\mathrm{kf}(\alpha) = \min\{\mathrm{kard}(x) \colon x \subseteq \alpha \land \sup(x) = \alpha\}.$$

Ayrıca, tanıma göre,

$$\mathrm{kf}(0) = 0, \qquad \mathrm{kf}(\alpha + 1) = 1$$

denebilir, ama bu durumları kullanmayacağız.

Teorem 73. *Her α limit ordinali için, tanım kümesi $\mathrm{kf}(\alpha)$ olan, değer kümesi α ordinalinin sınırsız bir altkümesi olan, kesin artan bir gönderme vardır.*

Kanıt. $f\colon \mathrm{kf}(\alpha) \to \alpha$ olsun, ve $f[\alpha]$, α ordinalinin sınırsız bir altkümesi olsun. Özyinelemeyle, tanım kümesi $\mathrm{kf}(\alpha)$ olan,

$$g(\beta) = \mathrm{maks}\Big(f(\beta), \sup\big(g[\beta]\big)\Big)$$

koşulunu sağlayan bir g göndermesi vardır. Eğer $\beta < \mathrm{kf}(\alpha)$ ve $g[\beta] \subseteq \alpha$ ise, o zaman $g[\beta]$, α ordinalinin sınırsız altkümesi değil, dolayısıyla $g(\beta) \in \alpha$; ayrıca $f(\beta) \leqslant g(\beta)$. Öyleyse g, istediğimiz gibidir. □

Teorem 74. *α ve β limit ordinalleri olsun. Eğer $f\colon \alpha \to \beta$ ve kesin artan ise, ve $\beta = \bigcup f[\alpha]$ ise, o zaman*

$$\mathrm{kf}(\alpha) = \mathrm{kf}(\beta).$$

Kanıt. $\mathrm{kf}(\beta) \leqslant \mathrm{kf}(\alpha)$ ve $\mathrm{kf}(\alpha) \leqslant \mathrm{kf}(\beta)$ eşitsizliklerini kanıtlayacağız.

1. $g\colon \mathrm{kf}(\alpha) \to \alpha$ ve $\bigcup g[\mathrm{kf}(\alpha)] = \alpha$ olsun. $\delta < \beta$ ise, hipoteze göre α ordinalinin bir θ elemanı için

$$\delta < f(\theta).$$

O zaman $\mathrm{kf}(\alpha)$ kardinalinin bir ι elemanı için

$$\theta < g(\iota), \qquad \delta < f(\theta) < f\big(g(\iota)\big).$$

Öyleyse $\bigcup(f \circ g)[\mathrm{kf}(\alpha)] = \beta$, dolayısıyla $\mathrm{kf}(\beta) \leqslant \mathrm{kf}(\alpha)$.

2. $h\colon \operatorname{kf}(\beta) \to \beta$ ve $\bigcup h[\operatorname{kf}(\beta)] = \beta$ olsun. $\delta < \operatorname{kf}(\beta)$ ise

$$k(\delta) = \min\{\xi \in \alpha\colon h(\delta) < f(\xi)\}$$

olsun. O zaman $k\colon \operatorname{kf}(\beta) \to \alpha$. Eğer $\theta \in \alpha$ ise, o zaman $\operatorname{kf}(\beta)$ kardinalinin

$$f(\theta) < h(\delta)$$

koşulunu sağlayan bir δ elemanı vardır. O zaman

$$f(\theta) < h(\delta) < f\big(k(\delta)\big),$$

dolayısıyla $\theta < k(\delta)$, çünkü f kesin artandır. Öyleyse $\bigcup k[\operatorname{kf}(\beta)] = \alpha$, dolayısıyla $\operatorname{kf}(\alpha) \leqslant \operatorname{kf}(\beta)$ ve aslında $\operatorname{kf}(\alpha) = \operatorname{kf}(\beta)$. □

Özel durum olarak $\boldsymbol{F}$ normal ve α limit ise

$$\operatorname{kf}(\boldsymbol{F}(\alpha)) = \operatorname{kf}(\alpha).$$

Teorem 75. *α limit ise* $\operatorname{kf}(\aleph_\alpha) = \operatorname{kf}(\alpha)$.

Kanıt. $\xi \mapsto \aleph_\xi$ normaldir. □

Teorem 76. *Cantor normal biçiminde*

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \dots + \omega^{\alpha_n} \cdot a_n$$

ve $\alpha_n > 0$ ise, o zaman

$$\operatorname{kf}(\alpha) = \begin{cases} \omega, & \text{eğer } \alpha_n \text{ bir ardılsa,} \\ \operatorname{kf}(\alpha_n), & \text{eğer } \alpha_n \text{ bir limitse.} \end{cases}$$

Kanıt. Son teoreme göre α limit, $\gamma \geqslant 1$, ve $\delta \geqslant 2$ ise

$$\operatorname{kf}(\alpha) = \operatorname{kf}(\beta + \alpha) = \operatorname{kf}(\gamma \cdot \alpha) = \operatorname{kf}(\delta^\alpha).$$ □

Bazen bu hesaplama bize yardım etmez. Mesela $f(0) = 0$ ve $f(n+1) = \omega^{f(n)}$ ve $\alpha = \sup(f[\omega])$ ise, yani

$$\alpha = \sup\{0, 1, \omega, \omega^{\omega}, \omega^{\omega^{\omega}}, \dots\}$$

ise, o zaman $\mathrm{kf}(\alpha) = \omega$, ama $\alpha = \omega^{\alpha}$.

Teorem 77. *Her α ordinali için*

$$\mathrm{kf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}.$$

Kanıt. $\beta < \aleph_{\alpha+1}$ ve $f\colon \beta \to \aleph_{\alpha+1}$ olsun. O zaman

$$\sup(f[\beta]) = \bigcup_{\xi<\beta} f(\xi).$$

Bu bileşimden $\aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha}$ çarpımına giden bir h gömmesini tanımlayacağız. Seçim Aksiyomu sayesinde $\bigcup\{{}^{\xi}\aleph_{\alpha}\colon \xi < \aleph_{\alpha+1}\}$ kümesi iyisıralanabilir. Bu sıralamaya göre $\delta < \aleph_{\alpha+1}$ ise ${}^{\delta}\aleph_{\alpha}$ kümesinin en küçük *gömmesi,* g_{δ} olsun. O zaman $\gamma < \sup(f[\beta])$ ise

$$\delta = \min\{z \in \beta\colon \gamma < f(z)\}, \qquad h(\gamma) = \bigl(g_{\beta}(\delta), g_{\delta}(\gamma)\bigr)$$

olsun. Böylece

$$\mathrm{kard}\bigl(\sup(f[\beta])\bigr) \leqslant \mathrm{kard}(\aleph_{\alpha} \times \aleph_{\alpha}) = \aleph_{\alpha},$$

dolayısıyla $\sup(f[\beta]) < \aleph_{\alpha+1}$. Sonuç olarak $\mathrm{kf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$. □

9.2 Hesaplamalar

Teorem 78. $2 \leqslant \kappa$, $1 \leqslant \lambda$, *ve* $\aleph_0 \leqslant \mathrm{maks}\{\kappa, \lambda\}$ *olsun. O zaman*

$$\lambda \geqslant \mathrm{kf}(\kappa) \Rightarrow \kappa < \kappa^{\lambda},$$
$$\mathrm{GKH} \wedge \lambda < \mathrm{kf}(\kappa) \Rightarrow \kappa = \kappa^{\lambda}.$$

Kanıt. $\mathrm{kf}(\kappa) \leqslant \lambda$ ise ${}^{\lambda}\kappa$ kümesinin

$$\kappa = \bigcup_{\xi<\lambda} f(\xi)$$

koşulunu sağlayan bir f elemanı vardır. Şimdi $\xi \mapsto g_{\xi} \colon \kappa \to {}^{\lambda}\kappa$ olsun. O zaman ${}^{\lambda}\kappa$ kümesinin $\{g_{\xi} \colon \xi < \kappa\}$ kümesinde olmayan bir

$$\eta \mapsto \min\Bigl(\kappa \smallsetminus \bigl\{g_{\xi}(\eta) \colon \xi < f(\eta)\bigr\}\Bigr)$$

elemanı vardır.

Şimdi $\lambda < \mathrm{kf}(\kappa)$ olsun. O zaman Teorem 77'nin kanıtındaki gibi

$$\begin{aligned}{}^{\lambda}\kappa = \bigcup_{\xi<\kappa} {}^{\lambda}\xi = \bigcup_{\lambda\leqslant\xi<\kappa} {}^{\lambda}\xi \\ \preccurlyeq \bigcup_{\lambda\leqslant\xi<\kappa} {}^{\lambda}(\mathrm{kard}(\xi)) = \bigcup_{\substack{\lambda\leqslant\xi<\kappa\\ \xi\in\mathbf{KN}}} {}^{\lambda}\xi \preccurlyeq \bigcup_{\substack{\lambda\leqslant\xi<\kappa\\ \xi\in\mathbf{KN}}} {}^{\xi}2.\end{aligned}$$

Eğer GKH doğruysa $\mu < \kappa \Rightarrow 2^{\mu} \leqslant \kappa$, dolayısıyla $\kappa^{\lambda} \leqslant \kappa$. □

Şimdi, gösterdiklerimize göre, eğer $\kappa + \lambda$ sonsuzsa, o zaman

$$\begin{gathered}2 \leqslant \kappa \leqslant 2^{\lambda} \Rightarrow \kappa^{\lambda} = 2^{\lambda},\\ \mathrm{kf}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa \Rightarrow \kappa < \kappa^{\lambda} \leqslant 2^{\kappa},\\ 1 \leqslant \lambda < \mathrm{kf}(\kappa) \Rightarrow \kappa \leqslant \kappa^{\lambda} \leqslant 2^{\kappa}.\end{gathered}$$

Ayrıca

$$\mathrm{GKH} \Rightarrow \kappa^{\lambda} = \begin{cases}\lambda^{+}, & \text{eğer } 2 \leqslant \kappa < \lambda \text{ ise},\\ \kappa^{+}, & \text{eğer } \mathrm{kf}(\kappa) \leqslant \lambda \leqslant \kappa \text{ ise},\\ \kappa, & \text{eğer } 1 \leqslant \lambda < \mathrm{kf}(\kappa) \text{ ise}.\end{cases}$$

Özel olarak

$$\text{GKH} \Rightarrow {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_{\beta+1}, & \text{eğer } \alpha < \beta \text{ ise,} \\ \aleph_{\alpha+1}, & \text{eğer } \operatorname{kf}(\alpha) \leqslant \aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha \text{ ise,} \\ \aleph_\alpha, & \text{eğer } \aleph_\beta < \operatorname{kf}(\alpha) \text{ ise.} \end{cases}$$