Alıştırmalar

Aksiyomatik Kümeler Kuramı

David Pierce
Matematik Bölümü, MSGSÜ

5 Aralık 2019

Alıştırma A. Bir $\boldsymbol{F}$ ordinal işlemi için, eğer her α için,

$$\beta < \boldsymbol{F}(\alpha) < \gamma$$

koşulunu sağlayan her β ve γ için,

$$\delta < \alpha < \zeta$$

koşulunu sağlayan bazı δ ve ζ için, her ξ için

$$\delta < \xi < \zeta \implies \beta < \boldsymbol{F}(\xi) < \gamma$$

ise, o zaman tanıma göre $\boldsymbol{F}$ **süreklidir.** $\boldsymbol{F}$ kesin artan olmak üzere $\boldsymbol{F}$'nin sürekli olmasının gerek ve yeter bir koşulunun, her α limiti için

$$\boldsymbol{F}(\alpha) = \sup \boldsymbol{F}[\alpha]$$

denkleminin doğru olması olduğunu gösterin.

Alıştırma B. Örnekler varsa, birini verin; yoksa olmadığını kanıtlayın.

1. Küme olmayan bir sınıf.
2. Sınıf olmayan bir küme.
3. Kendisini içermeyen bir küme.
4. Kendisini kapsamayan bir küme.
5. Ordinal olmayan, $\in$ tarafından iyisıralanan bir küme.
6. Ordinal olmayan, boş olmayan, geçişli bir küme.
7. Elemanları ordinal olan, en küçük elemanı 1 olan bir küme.
8. Ordinal olan, en küçük elemanı 1 olan bir küme.
9. Elemanları ordinal olan, en küçük elemanı olmayan bir küme.
10. Kesin artan, normal olmayan bir ordinaller işlemi.
11. Sürekli olan, kesin artmayan bir ordinaller işlemi.
12. Kesin azalan bir ordinaller işlemi.
13. Sayılamaz bir küme.
14. Küme olmayan, sayılabilir bir sınıf.

Alıştırma C. Aşağıdaki bir ordinaller eşitliği her durumda doğru ise eşitliği kanıtlayın; değilse bir karşıt örnek verin.

1. $\alpha + 0 = \alpha$.
2. $0 + \alpha = \alpha$.
3. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.
4. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
5. $\alpha \cdot 1 = \alpha$.
6. $1 \cdot \alpha = \alpha$.
7. $2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha$.
8. $\alpha + \beta \cdot \gamma = (\alpha + \beta) \cdot \gamma$.
9. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.
10. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
11. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.
12. $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$.
13. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$.
14. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha + \beta^2$.

Alıştırma D. Cantor normal biçimleri bulun:

1. $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3$.
2. $1 + \omega^2 + \omega + \omega^3$.
3. $1 + \omega^3 + \omega + \omega^2$.
4. $\omega^3 + \omega + \omega^2 + 1$.
5. $3 \cdot (\omega + 4)$.
6. $(\omega + 4) \cdot 3$.
7. $(\omega^2 + 3) \cdot (\omega + 4)$.
8. $(\omega + 4) \cdot (\omega^2 + 3)$.
9. $(\omega^2 \cdot 5 + 3) \cdot (\omega + 4)$.
10. $(\omega + 4) \cdot (\omega^2 \cdot 5 + 3)$.