Aksiyomatik Kümeler Kuramı (MAT 340)

Çözümler

David Pierce

19 Aralık 2019

Problem 1. Verilen ordinal işlemler sürekli midir? Kısaca açıklayın.

(a) $\xi \mapsto \omega^2 + \xi$

(b) $\xi \mapsto \omega \cdot \xi + 1$

Çözüm.

(a) Süreklidir çünkü normaldir. (Her α için $\xi \mapsto \alpha + \xi$ normaldir.)

(b) Sürekli değildir çünkü

$$\sup_{x<\omega}(\omega \cdot x + 1) = \omega \cdot \omega < \omega \cdot \omega + 1.$$

Problem 2. ω'da her n ve her pozitif k için

$$(\omega \cdot k + n)^2 = \omega^2 \cdot k + \omega \cdot k \cdot n + n.$$

(a) Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

Eğer $k = 1$ ise, o zaman iddia doğrudur çünkü

$$\begin{aligned}
(\omega \cdot 1 + n)^2 &= (\omega + n)^2 && (1)\\
&= (\omega + n) \cdot (\omega + n) && (2)\\
&= (\omega + n) \cdot \omega + (\omega + n) \cdot n && (3)\\
&= \omega^2 + \omega \cdot n + n && (4)\\
&= \omega^2 \cdot 1 + \omega \cdot 1 \cdot n + n. && (5)
\end{aligned}$$

Şimdi $k = m$ olmak üzere iddia doğru olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
&(\omega \cdot m' + n)^2 \\
&= ((\omega \cdot m + \omega) + n)^2 && (6)\\
&= (\omega \cdot m + (\omega + n))^2 && (7)\\
&= \omega^2 \cdot m + \omega \cdot m \cdot (\omega + n) + \omega + n && (8)\\
&= \omega^2 \cdot m + \omega^2 + \omega \cdot m \cdot n + \omega + n && (9)\\
&= \omega^2 \cdot m' + \omega \cdot m' \cdot n + n. && (10)
\end{aligned}$$

(b) Doğru bir kanıt verin. (Tümevarım kullanılmayabilir.)

Çözüm.

(a) (8) ve (10) yanlıştır.

(b) $$\begin{aligned}(\omega \cdot k + n)^2 &= (\omega \cdot k + n) \cdot (\omega \cdot k + n) \\ &= (\omega \cdot k + n) \cdot \omega \cdot k + (\omega \cdot k + n) \cdot n \\ &= \omega^2 \cdot k + \omega \cdot k \cdot n + n.\end{aligned}$$

Problem 3. Cantor normal biçimlerini bulun.

(a) $3 + \omega \cdot 2 + \omega^2 + \omega \cdot 2 + 3$

(b) $\omega^2 + \omega + \omega^2 + \omega + \omega^2$

Çözüm.

(a) $\omega^2 + \omega \cdot 2 + 3$

(b) $\omega^2 \cdot 3$

Problem 4. $\in$ tarafından iyisıralanmış olan, geçişli olmayan, üç elemanlı bir küme yazın.

Çözüm. En basit örnek $\{1, 2, 3\}$.