

# Aksiyomatik Kümeler Kuramı (MAT 340)

## Çözümler

David Pierce

19 Aralık 2019

**Problem 1.** Verilen ordinal işlemler sürekli midir? Kısaca açıklayın.

(a)  $\xi \mapsto \omega^2 + \xi$

(b)  $\xi \mapsto \omega \cdot \xi + 1$

**Çözüm.**

(a) Sürekli çünkü normaldir. (Her  $\alpha$  için  $\xi \mapsto \alpha + \xi$  normaldir.)

(b) Sürekli değildir çünkü

$$\sup_{x < \omega} (\omega \cdot x + 1) = \omega \cdot \omega < \omega \cdot \omega + 1.$$

**Problem 2.**  $\omega$ 'da her  $n$  ve her pozitif  $k$  için

$$(\omega \cdot k + n)^2 = \omega^2 \cdot k + \omega \cdot k \cdot n + n.$$

(a) Aşağıdaki kanıt nerede yanlıştır?

Eğer  $k = 1$  ise, o zaman iddia doğrudur çünkü

$$(\omega \cdot 1 + n)^2 = (\omega + n)^2 \quad (1)$$

$$= (\omega + n) \cdot (\omega + n) \quad (2)$$

$$= (\omega + n) \cdot \omega + (\omega + n) \cdot n \quad (3)$$

$$= \omega^2 + \omega \cdot n + n \quad (4)$$

$$= \omega^2 \cdot 1 + \omega \cdot 1 \cdot n + n. \quad (5)$$

Şimdi  $k = m$  olmak üzere iddia doğru olsun. O zaman

$$(\omega \cdot m' + n)^2$$

$$= ((\omega \cdot m + \omega) + n)^2 \quad (6)$$

$$= (\omega \cdot m + (\omega + n))^2 \quad (7)$$

$$= \omega^2 \cdot m + \omega \cdot m \cdot (\omega + n) + \omega + n \quad (8)$$

$$= \omega^2 \cdot m + \omega^2 + \omega \cdot m \cdot n + \omega + n \quad (9)$$

$$= \omega^2 \cdot m' + \omega \cdot m' \cdot n + n. \quad (10)$$

(b) Doğru bir kanıt verin. (Tümevarım kullanılmayabilir.)

## Çözüm.

(a) (8) ve (10) yanlıştır.

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad (\omega \cdot k + n)^2 &= (\omega \cdot k + n) \cdot (\omega \cdot k + n) \\ &= (\omega \cdot k + n) \cdot \omega \cdot k + (\omega \cdot k + n) \cdot n \\ &= \omega^2 \cdot k + \omega \cdot k \cdot n + n. \end{aligned}$$

**Problem 3.** Cantor normal biçimlerini bulun.

(a)  $3 + \omega \cdot 2 + \omega^2 + \omega \cdot 2 + 3$

(b)  $\omega^2 + \omega + \omega^2 + \omega + \omega^2$

**Çözüm.**

(a)  $\omega^2 + \omega \cdot 2 + 3$

(b)  $\omega^2 \cdot 3$

**Problem 4.**  $\in$  tarafından iyisıralanmış olan, geçişli olmayan, üç elemanlı bir küme yazın.

**Çözüm.** En basit örnek  $\{1, 2, 3\}$ .