Aksiyomatik Kümeler Kuramı (MAT 340)

David Pierce

25 Mayıs 2016

ÇÖZÜMLER

Problem 1. Cantor normal biçimlerini bulun.

(a) $\omega^2 + \omega \cdot 2 + 3 + \omega \cdot 2 + \omega^2$

(b) $(\omega \cdot 3 + 1) \cdot (\omega + 2)$

(c) $(\omega^4 + \omega^3 \cdot 2 + \omega^2 \cdot 3 + \omega + 4) \cdot \omega^\omega$

(d) $(\omega + 1)^3$

Çözüm.

(a) $\omega^2 \cdot 2$

(b) $\omega^2 + \omega \cdot 6 + 1$

(c) ω^ω

(d) $\omega^3 + \omega^2 + \omega + 1$

Problem 2. Aşağıdaki kanıt yanlıştır.

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha && (1) \\ &= 0 + \alpha. && (2) \end{aligned}$$

Bazı γ için

$$\alpha + \gamma = \gamma + \alpha \tag{3}$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma' &= (\alpha + \gamma)' && (4) \\ &= (\gamma + \alpha)' && (5) \\ &= \gamma' + \alpha. && (6) \end{aligned}$$

Son olarak γ limit olsun, ve $\beta < \gamma$ durumunda

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \tag{7}$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= \sup_{\xi<\gamma}(\alpha + \xi) && (8) \\ &= \sup_{\xi<\gamma}(\xi + \alpha) && (9) \\ &= \gamma + \alpha. && (10) \end{aligned}$$

Sonuç olarak her β için $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

(a) Kanıt nerede yanlıştır? Anlatın.

(b) Kanıt düzeltilebilir mi? Anlatın.

Çözüm. (a) (6) ve (10) eşitlikleri yanlıştır:

$$(1 + \omega)' = \omega' > \omega = 1' + \omega;$$
$$\sup_{\xi<\omega}(\xi + \omega) = \sup_{\xi<\omega}(\omega) = \omega < \omega + \omega.$$

(b) Kanıt düzeltilemez çünkü $\alpha+\beta = \beta+\alpha$ iddiası yanlıştır.

Problem 3.

(a) Sınıf olmayan bir küme yazabilir misiniz?

(b) Küme olmayan bir sınıf yazabilir misiniz?

Çözüm.

(a) Hayır, her a kümesi, $\{x\colon x \in a\}$ sınıfına eşittir.

(b) Evet, ne $\{x\colon x \notin x\}$ sınıfı ne **ON** sınıfı, bir kümedir.

Problem 4. Derste kullandığımız tanıma göre

$$\beth_0 = \aleph_0 = \omega, \qquad \beth_{\alpha+1} = \operatorname{kard}(\mathscr{P}(\beth_\alpha)) = 2^{\beth_\alpha},$$

ve limitlerde $\xi \mapsto \beth_\xi$ süreklidir. Bilinmeyen değişkeni ξ olan aşağıdaki denklemleri çözün.

(a) $(\beth_\alpha)^{\beth_\xi} = \beth_{\alpha+2}$.

(b) $(\beth_{\alpha+1})^{\beth_\xi} = \beth_{\alpha+1}$.

Çözüm.

(a) $\boxed{\xi = \alpha + 1.}$ Aslında $2 < \beth_\alpha < \beth_{\alpha+2} = 2^{\beth_{\alpha+1}}$ olduğundan

$$\beth_{\alpha+2} \leqslant {\beth_\alpha}^{\beth_{\alpha+1}} \leqslant 2^{\beth_{\alpha+1} \otimes \beth_{\alpha+1}} = \beth_{\alpha+2},$$

dolayısıyla $\alpha + 1$, denklemin bir çözümüdür. Benzer şekilde ${\beth_\alpha}^{\beth_\alpha} = \beth_{\alpha+1}$ ve ${\beth_\alpha}^{\beth_{\alpha+2}} = \beth_{\alpha+3}$, dolayısıyla denklemin başka çözümü yoktur.

(b) $\boxed{\xi \leqslant \alpha}$ çünkü

$$(\beth_{\alpha+1})^{\beth_\xi} = 2^{\beth_\alpha \otimes \beth_\xi} = 2^{\beth_{\max(\alpha,\xi)}} = \beth_{\max(\alpha,\xi)+1}.$$

Problem 5. Doğru mu, yanlış mı? (Yanlış cevaplar puan kaybeder. A, B, ve C her zaman kümedirler.)

a) $\aleph_{11010} \oplus \aleph_{101} = \aleph_{11111}$.

b) Bazı A ve B için

$$A \prec \mathscr{P}(A), \qquad\qquad B \approx \mathscr{P}(B).$$

c) A, B, ve C sonsuz ise

$$\operatorname{kard}\bigl((A \sqcup B) \times C\bigr) = \max(\operatorname{kard} A, \operatorname{kard} B) \oplus \operatorname{kard} C.$$

d) Herhangi A ve B için, bazen

$$\operatorname{kard}(A \times B) = \max(\operatorname{kard} A, \operatorname{kard} B),$$

bazen

$$\operatorname{kard}(A \times B) = 0.$$

Çözüm.

a) Yanlıştır. $\aleph_{11010} \oplus \aleph_{101} = \aleph_{11010}$.

b) Yanlıştır. Hiçbir B için $B \approx \mathscr{P}(B)$ değildir.

c) Doğrudur. Herhangi κ ve λ kardinalleri için, tanıma göre

$$\kappa \oplus \lambda = \operatorname{kard}(\kappa \sqcup \lambda),$$
$$\kappa \otimes \lambda = \operatorname{kard}(\kappa \times \lambda),$$

ama teoreme göre κ ve λ sonsuz ise

$$\kappa \oplus \lambda = \kappa \otimes \lambda = \max(\kappa, \lambda).$$

d) Doğrudur. $A = \varnothing$ ise $\operatorname{kard}(A \times B) = 0$.