Kümeler kuramı alıştırmaları

David Pierce

May 19, 2014
Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi İstanbul
dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

Alıştırma I. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, ve $\boldsymbol{C}$ sınıf ise, hangi formüller aşağıdaki sınıfları tanımlar?

1. $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$.
2. $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$.
3. $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C}$.
4. $\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$.
5. $\bigcap \boldsymbol{A}$.
6. $\bigcup \boldsymbol{A}$.
7. $\bigcup\bigcup \boldsymbol{A}$.
8. $\mathscr{P}(\boldsymbol{A})$.

Alıştırma II. Aşağıdaki kümelerin oluşturduğu sınıflarını tanımlayan formüller yazın. Kısaltmalar kullanırsanız, onları da tanımlamalısınız.

1. Boş kümeler.
2. Boş olmayan kümeler.
3. Tek elemanlı kümeler.
4. İki elemanlı kümeler.
5. En çok iki elemanlı kümeler.
6. Boş olmayan, en çok iki elemanlı kümeler.
7. Sıralı ikililer.
8. Küme olan iki konumlu bağıntılar.
9. Küme olan göndermelar.

10. Küme olan geçişli bağıntılar.
11. Geçişli kümeler.
12. İçerilme tarafından iyisıralanmış kümeler.
13. Ordinaller.
14. Doğal sayılar.
15. Kardinaller.

Alıştırma III. Aşağıdaki bir ordinaller eşitliği her zaman doğru ise kanıtlayın; değilse bir karşıt örnek verin.

1. $\alpha + 0 = \alpha$.
2. $0 + \alpha = \alpha$.
3. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.
4. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
5. $\alpha \cdot 1 = \alpha$.
6. $1 \cdot \alpha = \alpha$.
7. $\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$.
8. $2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha$.
9. $\alpha + \beta \cdot \gamma = (\alpha + \beta) \cdot \gamma$.
10. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$.
11. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
12. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.
13. $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$.
14. $\alpha^0 = 0$.
15. $\alpha^0 = 1$.
16. $0^\alpha = 1$.
17. $0^\alpha = 0$.
18. $\alpha^\beta = \beta^\alpha$.
19. $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha+\beta^2$.
20. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta + \alpha^\gamma$.
21. $(\alpha + \beta)^\gamma = \alpha^\gamma + \beta^\gamma$.
22. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.
23. $\alpha^{\beta\cdot\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$.
24. $(\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$.
25. $\alpha^{(\beta^\gamma)} = \left(\alpha^\beta\right)^\gamma$.

Alıştırma IV. Cantor normal biçimleri bulun:

1. $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3$.
2. $3 \cdot (\omega + 4)$.
3. $(\omega + 4) \cdot 3$.
4. $(\omega^2 + \omega + 1)(\omega^3 + \omega^2 + \omega + 1)$.
5. $(\omega + 5)^2$.
6. $9^{\omega+2}$.
7. $(\omega + 5)^{\omega+2}$.
8. $(\omega^\omega)^{\omega^\omega}$.
9. $(\omega^{\omega^\omega})^{\omega^\omega}$.
10. $6^{\omega^{1330}}$.
11. $(\omega^2 + \omega + 1)^{\omega^3+\omega^2+\omega+1}$.

12. $\omega^{\omega^{\omega}\cdot 2+\omega^{17}}\cdot 5+\omega^{\omega^5}\cdot 14+\omega^{\omega^{\omega}+\omega^{17}}\cdot 6+\omega+317$.

Alıştırma V. Her kümenin kardinali, $\aleph_\alpha$ veya $\beth_\alpha$ biçiminde yazın.

1. ω.
2. ω^ω.
3. $\sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}$.
4. Sayılabilir ordinaller kümesi.
5. $\aleph_3 \oplus \aleph_5$.
6. $\aleph_5 \oplus \aleph_3$.
7. $\aleph_3 \otimes \aleph_5$.
8. $\aleph_5 \otimes \aleph_3$.
9. $\aleph_{2\cdot\omega} \oplus \aleph_{\omega\cdot 2}$.
10. $(\aleph_2 \oplus \aleph_3) \otimes (\aleph_\omega \oplus \aleph_{16})$.
11. $(\aleph_2 \oplus \aleph_3) \otimes (\omega \oplus \aleph_{16})$.
12. $(\aleph_2 \otimes \aleph_3) \oplus (\aleph_\omega \otimes \aleph_{16})$.
13. $\aleph_{\omega^\omega} \oplus \aleph_\omega$.
14. $\aleph_\omega \oplus \aleph_{\omega^\omega}$.
15. $\aleph_{\omega^\omega} \otimes \aleph_\omega$.
16. $\mathbb{R}$.
17. $\mathscr{P}(\mathbb{R})$.
18. $\mathbb{R}$ kümesinin sonlu altkümeleri kümesi.
19. ${}^{\omega}\mathbb{R}$.
20. $\mathbb{R}$ kümesinin sayılabilir altkümeleri kümesi.
21. $\mathbb{R}$ kümesinin sayılamaz altkümeleri kümesi.
22. $(\aleph_0)^{\aleph_0}$.
23. $\beth_0{}^{\beth_0}$.
24. $(\beth_1)^{\beth_1}$.
25. $(\aleph_1)^{\beth_1}$.
26. $\sup\{\aleph_0, \aleph_0{}^{\aleph_0}, \aleph_0{}^{\aleph_0{}^{\aleph_0}}, \dots\}$.
27. $(\aleph_{\omega^2\cdot 3+\omega})^{\beth_{\omega^\omega}}$.
28. $\beth_{\omega+1}{}^{\beth_\omega}$.
29. $\mathscr{P}(\beth_\omega)$.