Cantor normal biçimleri

David Pierce

19 Mayıs 2014
Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul
dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

İçindekiler

Bu metinde Cantor normal biçimi hesaplama kuralları elde edilir. Cantor normal biçiminde

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_m} \cdot a_m,$$
$$\beta = \omega^{\beta_0} \cdot b_0 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot b_n$$

olsun. O zaman

$$\begin{gathered}\{m, n\} \subseteq \omega, \\ \alpha_0 > \cdots > \alpha_m, \qquad \beta_0 > \cdots > \beta_n, \\ \{a_0, \ldots, a_m, b_0, \ldots, b_n\} \subseteq \omega \smallsetminus \{0\}, \\ \operatorname{der}(\alpha) = \alpha_0, \qquad \operatorname{der}(\beta) = \beta_0.\end{gathered}$$

1 Toplama

İlk olarak $\alpha + \beta$ toplamının Cantor normal biçimini bulmak isteriz. Ordinaller toplaması birleşmeli olduğundan

$$\boxed{\alpha + \beta = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_m} \cdot a_m + \omega^{\beta_0} \cdot b_0 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot b_n,}$$

ama $\alpha_m \leqslant \beta_0$ ise bu ifade Cantor normal biçiminde değildir.

1. $\boxed{\alpha_m = \beta_0}$ ise ordinaller çarpması soldan dağıldığından

   $$\begin{aligned}\alpha + \beta = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_{m-1}} \cdot a_{m-1} \\ + \omega^{\alpha_m} \cdot (a_m + b_0) + \omega^{\beta_1} \cdot b_1 + \cdots + \omega^{\beta_n} \cdot b_n,\end{aligned}$$

   ve bu ifade $\alpha + \beta$ toplamının Cantor normal biçimidir.

2. $\boxed{\alpha_m < \beta_0}$ ise, aşağıdaki teoreme göre, $\omega^{\alpha_m} \cdot a_m$ terimini çıkararak yukarıdaki ifadeyi sadeleştirebiliriz.

Teorem. $\operatorname{der}(\gamma) < \operatorname{der}(\delta)$ *ise* $\gamma + \delta = \delta$.

Kanıt. $\gamma < \delta$ ise $\omega^\gamma + \omega^\delta = \omega^\delta$ eşitliğini kanıtlamak yeter. Bu durumda 0 olmayan bir θ için $\gamma + \theta = \delta$, dolayısıyla

$$\omega^\gamma + \omega^\delta = \omega^\gamma \cdot (1 + \omega^\theta).$$

Tümevarımdan $1 + \omega^\theta = \omega^\theta$:

1. $1 + \omega = \sup_{\xi<\omega}(1+\xi) = \omega$.

2. $1+\omega^\iota = \omega^\iota$ ise, o zaman (tümevarımdan) 0 olmayan tüm k doğal sayıları için

$$1 + \omega^\iota \cdot k = \omega^\iota \cdot k,$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned}1 + \omega^{\iota+1} = 1 + \omega^\iota \cdot \omega = \sup_{\xi<\omega}(1+\omega^\iota\cdot\xi)\\ = \sup_{0<\xi<\omega}(1+\omega^\iota\cdot\xi) = \sup_{0<\xi<\omega}(\omega^\iota\cdot\xi) = \omega^{\iota+1}.\end{aligned}$$

3. ι bir limit ve $\theta < \iota$ olduğu zaman $1 + \omega^\theta = \omega^\theta$ ise

$$1 + \omega^\iota = \sup_{\xi<\iota}(1+\omega^\xi) = \sup_{\xi<\iota}(\omega^\xi) = \omega^\iota. \qquad \square$$

Örneğin

$$\begin{aligned}(\omega^\omega \cdot 2 + \omega^{17}\cdot 34) + (\omega^{10}\cdot 3 + 63)\\ = \omega^\omega\cdot 2 + \omega^{17}\cdot 34 + \omega^{10}\cdot 3 + 63,\\ (\omega^\omega\cdot 2 + \omega^{17}\cdot 3) + (\omega^{17}\cdot 34 + 63) = \omega^\omega\cdot 2 + \omega^{17}\cdot 37 + 63,\\ (\omega^\omega\cdot 2 + \omega^{10}\cdot 3) + (\omega^{17}\cdot 34 + 63) = \omega^\omega\cdot 2 + \omega^{17}\cdot 34 + 63.\end{aligned}$$

2 Çarpma

Şimdi $\alpha\cdot\beta$ çarpımının Cantor normal biçimini bulmak isteriz. Ordinaller çarpması soldan dağılmalı olduğundan

$$\alpha\cdot\beta = \alpha\cdot\omega^{\beta_0}\cdot b_0 + \cdots + \alpha\cdot\omega^{\beta_n}\cdot b_n.$$

Bu toplamın $\alpha \cdot \omega^{\beta_k} \cdot b_k$ terimlerinin Cantor normal biçimini bulmak için

$$\gamma = \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_m} \cdot a_m$$

olsun ($\gamma = 0$ olabilir), dolayısıyla

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \gamma,$$

ve yukarıdaki Teoreme göre

$$\gamma + \omega^{\alpha_0} = \omega^{\alpha_0}.$$

Şimdi β_k üslerine göre iki durum vardır: $\beta_k = 0$ ve $\beta_k > 0$.

1. $\boxed{0 < c < \omega}$ ise

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot c &= (\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \gamma) \cdot c \\
&= \underbrace{(\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \gamma) + \cdots + (\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \gamma)}_{c} \\
&= \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \underbrace{(\gamma + \omega^{\alpha_0} \cdot a_0) + \cdots + (\gamma + \omega^{\alpha_0} \cdot a_0)}_{c-1} + \gamma \\
&= \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \underbrace{\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \cdots + \omega^{\alpha_0} \cdot a_0}_{c-1} + \gamma \\
&= \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 \cdot c + \gamma \\
&= \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 \cdot c + \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_m} \cdot a_m,
\end{aligned}$$

ve bu son ifade, Cantor normal biçimindedir.

2. $\boxed{\delta > 0}$ olsun. O zaman bir θ için $\delta = 1 + \theta$, dolayısıyla

$$\alpha \cdot \omega^{\delta} = \alpha \cdot \omega \cdot \omega^{\theta}.$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \omega &= \sup_{x<\omega} (\alpha \cdot x)\\ &= \sup_{x<\omega} \bigl((\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \gamma) \cdot x\bigr)\\ &= \sup_{x<\omega} (\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 \cdot x + \gamma)\\ &\leqslant \sup_{x<\omega} \bigl(\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 \cdot (x+1)\bigr)\\ &= \omega^{\alpha_0} \cdot \sup_{x<\omega} \bigl(a_0 \cdot (x+1)\bigr)\\ &= \omega^{\alpha_0} \cdot \omega,\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\omega^{\alpha_0} \cdot \omega = \sup_{x<\omega} (\omega^{\alpha_0} \cdot x) \leqslant \sup_{x<\omega} (\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \omega,$$

dolayısıyla

$$\begin{gathered}\alpha \cdot \omega = \omega^{\alpha_0} \cdot \omega,\\ \alpha \cdot \omega^{\delta} = \omega^{\alpha_0} \cdot \omega \cdot \omega^{\theta} = \omega^{\alpha_0+\delta}.\end{gathered}$$

Şu andan itibaren

$$\beta_n > 0, \qquad\qquad 0 < c < \omega$$

olsun. Hem $\alpha \cdot \beta$ hem $\alpha \cdot (\beta + c)$ çarpımının Cantor normal biçimini bulmuştuk. Aslında

$$\alpha \cdot \beta = \omega^{\alpha_0+\beta_0} \cdot b_0 + \cdots + \omega^{\alpha_0+\beta_n} \cdot b_n,$$

ve kısaca

$$\boxed{\alpha \cdot \beta = \omega^{\alpha_0} \cdot \beta;}$$

ayrıca

$$\boxed{\alpha \cdot (\beta + c) = \omega^{\alpha_0} \cdot \beta + \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 \cdot c + \gamma,}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} &\omega^{\alpha_0+\beta_0} \cdot b_0 + \cdots + \omega^{\alpha_0+\beta_n} \cdot b_n \\ &\qquad\qquad + \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 \cdot c + \omega^{\alpha_1} \cdot a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_m} \cdot a_m \end{aligned}$$

Cantor normal biçimi çıkar. Örneğin

$$\begin{aligned} 5 \cdot (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 16 + 7) &= \omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 16 + 35, \\ (\omega^\omega \cdot 2 + \omega + 5) \cdot (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 16) &= \omega^{\omega+2} \cdot 3 + \omega^{\omega+1} \cdot 16, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &(\omega^\omega \cdot 2 + \omega + 5) \cdot (\omega^2 \cdot 3 + \omega \cdot 16 + 7) \\ &\qquad\qquad = \omega^{\omega+2} \cdot 3 + \omega^{\omega+1} \cdot 16 + \omega^\omega \cdot 14 + \omega + 5. \end{aligned}$$

3 Kuvvet alma

Son olarak α^β kuvvetinin Cantor normal biçimini isteriz. Kuvvet alma kurallarına göre

$$\alpha^\beta = \alpha^{\omega^{\beta_0} \cdot b_0} \cdot \alpha^{\omega^{\beta_1} \cdot b_1} \cdots \alpha^{\omega^{\beta_n} \cdot b_n}.$$

İki durum vardır.

1. $\boxed{1 < \alpha < \omega}$ olsun. O zaman

   $$\alpha^\omega = \omega,$$

   dolayısıyla $k < \omega \leqslant \delta$ ise

   $$\alpha^{\omega^{k+1}} = \omega^{\omega^k}, \qquad\qquad \alpha^{\omega^\delta} = \omega^{\omega^\delta}$$

(çünkü $1+\delta=\delta$). Sonuç olarak $\beta_{\ell-1} \geqslant \omega > \beta_\ell$ ise

$$\beta^* = \omega^{\beta_0} \cdot b_0 + \cdots + \omega^{\beta_{\ell-1}} \cdot b_{\ell-1} + \omega^{\beta_\ell - 1} \cdot b_\ell + \cdots + \omega^{\beta_n - 1} \cdot b_n$$

olsun; o zaman

$$\alpha^\beta = \omega^{\beta^*}, \qquad \alpha^{\beta+c} = \omega^{\beta^*} \cdot a^c,$$

ve bunlar, Cantor normal biçimindedir. Örneğin

$$2^{\omega^\omega \cdot 3 + \omega^5 \cdot 4 + \omega \cdot 7 + 5} = \omega^{\omega^\omega \cdot 3 + \omega^4 \cdot 4 + 7} \cdot 32.$$

2. $\boxed{\alpha \geqslant \omega}$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= \alpha \cdot (\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \gamma) \\
&= \alpha \cdot \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \alpha \cdot \gamma \\
&= (\omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \gamma) \cdot \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \alpha \cdot \gamma \\
&= \omega^{\alpha_0 + \alpha_0} \cdot a_0 + \alpha \cdot \gamma \\
&= \omega^{\alpha_0 \cdot 2} \cdot a_0 + \alpha \cdot \gamma,
\end{aligned}$$

ve genelde

$$\alpha^c = \omega^{\alpha_0 \cdot c} \cdot a_0 + \alpha^{c-1} \cdot \gamma.$$

Özel olarak

$$(\omega^{\alpha_0})^c \leqslant \alpha^c < (\omega^{\alpha_0})^{c+1},$$

dolayısıyla

$$\alpha^\omega = (\omega^{\alpha_0})^\omega,$$
$$\alpha^{\omega^{\beta_k} \cdot b_k} = (\omega^{\alpha_0})^{\omega^{\beta_k} \cdot b_k}$$

(çünkü $\beta_k \geqslant \beta_n > 0$), ve sonuç olarak

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha^\beta &= \omega^{\alpha_0 \cdot \beta}, \\ \alpha^{\beta+c} &= \omega^{\alpha_0 \cdot \beta} \cdot \alpha^c. \end{aligned}}$$

O zaman

$$\begin{aligned}\alpha^{\beta+c} &= \omega^{\alpha_0\cdot\beta}\cdot(\omega^{\alpha_0\cdot c}\cdot a_0+\alpha^{c-1}\cdot\gamma)\\ &= \omega^{\alpha_0\cdot(\beta+c)}\cdot a_0+\omega^{\alpha_0\cdot\beta}\cdot\alpha^{c-1}\cdot\gamma.\end{aligned}$$

Örneğin

$$\begin{aligned}(\omega^{\omega+1}+\omega^2+1)^{\omega^2+\omega\cdot 3+2} &= \omega^{(\omega+1)\cdot(\omega^2+\omega\cdot 3)}\cdot(\omega^{\omega+1}+\omega^2+1)^2\\ &= \omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3}\cdot(\omega^{\omega+1}+\omega^2+1)^2,\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(\omega^{\omega+1}+\omega^2+1)^2 &= \omega^{(\omega+1)\cdot 2}+(\omega^{\omega+1}+\omega^2+1)\cdot(\omega^2+1)\\ &= \omega^{(\omega+1)\cdot 2}+\omega^{\omega+1+2}+\omega^{\omega+1}+\omega^2+1\\ &= \omega^{\omega\cdot 2+1}+\omega^{\omega+3}+\omega^{\omega+1}+\omega^2+1,\end{aligned}$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned}&(\omega^{\omega+1}+\omega^2+1)^{\omega^2+\omega\cdot 3+2}\\ &\qquad= \omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3+\omega\cdot 2+1}+\omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3+\omega+3}\\ &\qquad\quad+\omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3+\omega+1}+\omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3+2}+\omega^{\omega^3+\omega^2\cdot 3}.\end{aligned}$$