Aksiyomatik Kümeler Kuramı (MAT 340)

David Pierce

25 Nisan 2014

Problem 1. Cevaplarınızı kısaca açıklayın: // *Briefly explain your answers:*

a) Her küme bir sınıf mıdır? // *Is every set a class?*

b) Her sınıf bir küme midir? // *Is every class a set?*

Çözüm.

a) Evet: Her a kümesi, $\{x\colon x \in a\}$ sınıfıdır.

b) Hayır: Russell Paradoksuna göre $\{x\colon x \notin x\}$ sınıfı, küme değildir.

Problem 2. a) **Normal** ordinal işlemlerini tanımlayın. // *Define the **normal** ordinal operations.*

b) Ordinal $\xi \mapsto \xi + \xi$ işleminin normal olup olmadığını gösterin. // *Show whether the ordinal operation* $\xi \mapsto \xi + \xi$ *is normal.*

Çözüm. a) Eğer $\boldsymbol{F}$ kesin artan ve her α limiti için

$$\boldsymbol{F}(\alpha) = \sup_{\xi < \alpha} \boldsymbol{F}(\xi)$$

ise, $\boldsymbol{F}$ normaldir.

b) Normal değildir:

$$\sup_{x \in \omega}(x + x) = \omega < \omega + \omega.$$

Problem 3. $\left\{\begin{array}{l}\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma\\(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma\end{array}\right\}$ eşitliklerinin biri her zaman doğru ise kanıtlayın. // *If one of the equations is always true, prove it.*

Çözüm. i) $\alpha\cdot(\beta+0)=\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\beta+0=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot 0.$

ii) Bir γ için

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma \tag{1}$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\beta+\gamma')&=\alpha\cdot(\beta+\gamma)'\\&=\alpha\cdot(\beta+\gamma)+\alpha\\&=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma+\alpha\\&=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma'.\end{aligned}$$

iii) δ limit olsun ve $\gamma<\delta$ ise

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$$

olsun. $\alpha>0$ varsayılabilir. O zaman

$$\begin{aligned}\alpha\cdot(\beta+\delta)&=\alpha\cdot\sup_{\xi<\delta}(\beta+\xi) &&[\text{tanım}]\\&=\sup_{\xi<\delta}(\alpha\cdot(\beta+\xi)) &&[\xi\mapsto\alpha\cdot\xi\text{ normal}]\\&=\sup_{\xi<\delta}(\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\xi) &&[\text{hipotez}]\\&=\alpha\cdot\beta+\sup_{\xi<\delta}(\alpha\cdot\xi) &&[\xi\mapsto\alpha\cdot\beta+\xi\text{ normal}]\\&=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\delta. &&[\text{tanım}]\end{aligned}$$

Problem 4. a) Geçişli kümeler sınıfını tanımlayan, serbest değişkeni x olan bir formül yazın. "$\subseteq$" işaretini kullanabilirsiniz. // *Write down a formula in the free variable x defining the class of transitive sets. You may use the symbol $\subseteq$.*

b) Küme olan göndermeler sınıfını tanımlayan, serbest değişkeni w olan bir formül yazın. "$=$" işaretini ve "(x, y)" gibi ifadeleri kullanabilirsiniz. // *Write down a formula in the free variable z defining the class of functions that are sets. You may use the symbol $=$ and expressions like (x, y).*

Çözüm. a) $\forall y\ (y \in x \Rightarrow y \subseteq x)$.

b) $$\forall z\ \bigl(z \in w \Rightarrow \exists x\ \exists y\ (x, y) = z\bigr)$$
$$\wedge\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ \bigl((x, y) \in w \wedge (x, z) \in w \Rightarrow y = z\bigr).$$