Kümeler kuramı

David Pierce

13 Mart 2013, saat 8:35

Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul
dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

Önsöz

Bu notları, MAT 340 kodlu Aksiyomatik Kümeler Kuramı dersi için yazıyorum. Lütfen hataları bana bildirin.

İçindekiler

1 Giriş

1.1 Sayma ve ordinaller

Bir torbada birkaç tane satranç taşımız var, onları teker teker çekiyoruz, ve aynı zamanda sayılar diyoruz:

1. piyade (*pawn*)	3. at (*knight*)	5. vezir (*queen*)
2. kale (*rook*)	4. fil (*bishop*)	6. şah (*king*)

Bu şekilde taşları *saymış olduk.* Sonuç olarak 6 tane taşımız var deriz.

Ama taşları belli bir *sırada* çektik. Başka bir sıra mümkündü. Taşları tekrar çantaya koyup çekiyoruz:

1. piyade	3. vezir	5. fil
2. at	4. kale	6. şah

Son taşı çekince yine 6 numarasını diyoruz. Her zaman öyle olacak: her zaman taşları sayınca 6'ya kadar sayacağız. Ama nasıl biliyoruz?

Saymak nedir? Saymanın nesnesi, bir **topluluktur** (*collection*).* Bir topluluğu sayınca aslında onu **sıralıyoruz** (*order*).

A bir topluluk olsun, ve R, onun bir **sıralaması** (*ordering*) olsun. O zaman A topluluğunun **elemanları** (*elements*) veya **öğeleri** (*members*) vardır; ve bu topluluğun tüm b, c, ve d elemanları için

1) $b\ R\ b$ değil, yani
$$\neg\, b\ R\ b;$$

2) $b\ R\ c$ ve $c\ R\ d$ ise $b\ R\ d$ olur, yani
$$b\ R\ c\ \ \&\ \ c\ R\ d \implies b\ R\ d;$$

3) b ve c birbirinden farklıysa ya $b\ R\ c$ ya da $c\ R\ b$ olur, yani
$$b = c\ \vee\ b\ R\ c\ \vee\ c\ R\ b.$$

***Kümeler** (*sets*), özel topluluk olacak.

Yani R,

(1) **yansımasız** veya **dönüşsüz** (*irreflexive*),†
(2) **geçişli** veya **geçişken** (*transitive*),‡ ve
(3) **doğrusal** (*linear*) veya **tam** (*total*)

bir bağıntıdır. O zaman (A, R) ikilisi (aslında *sıralı* ikilisi), bir **sıradır.** Bu sıra, A **topluluğunun bir sırasıdır.**

Şimdi A, satranç taşları torbamız olsun. O zaman A topluluğunun tüm sıraları, birbiriyle **izomorftur** (*isomorphic*). Yani R ile S, A topluluğunun sıralamalarıysa, o zaman A topluluğundan kendisine giden öyle bir birebir ve örten f göndermesi vardır—yani A topluluğunun öyle bir f **permütasyonu** (*permutation*) veya **eşleşmesi** vardır—ki A topluluğunun tüm b ile c elemanları için

$$b \mathrel{R} c \iff f(b) \mathrel{S} f(c)$$

denkliği doğrudur. Ama bunu nasıl biliyoruz?

Şimdi A, pozitif *tamsayılar* topluluğu olsun. Yani $A = \mathbb{N}$ olsun. Bu topluluğun alışılmış *doğal* $<$ sıralaması vardır. Ama başka sıralamaları da vardır. Mesela $\mathbb{N}$ topluluğunun öyle bir R **bağıntısı** (veya **ilişkisi:** *relation*) vardır ki topluluğun tüm k ile m elemanları için

$$k \mathrel{R} m \iff 1 < k < m \lor 1 = m < k$$

denkliği doğrudur. Öyleyse R bağıntısı, $\mathbb{N}$ topluluğunu sıralıyor; aslında R sıralaması, $<$ sırası ile hemen hemen aynıdır, ancak R sırasına göre 1 elemanı, $\mathbb{N}$ topluluğunun *son* elemanıdır. O zaman $(\mathbb{N}, <)$ ile $(\mathbb{N}, R)$, birbirine izomorf değildir:

$<$	1,	2,	3,	…;	?
R	2,	3,	4,	…;	1

Şimdi

$$k \mathrel{S} m \iff (2 \mid k + m \;\&\; k < m) \lor (2 \nmid k \;\&\; 2 \mid m)$$

olsun. O zaman $k \mathrel{S} m$ ancak ve ancak

†Işık, bir aynadan yansır; ses, bir kayalıktan yansır. *Yıkanmak* fiili, *kendi kendini yıkamak* öbeğinin anlamına gelirse, dönüşlüdür; *yıkanılma* fiilinin anlamına gelirse, edilgendir [7, 10].

‡*Kaynatmak* fiili geçişlidir, çünkü bir nesne ister; *kaynamak* geçişsizdir.

1) hem k hem m ya tek ya çift, ve $k < m$, veya
2) k tek ve m çift.

O zaman S bağıntısı da, $\mathbb{N}$ topluluğunu sıralıyor, ama $(\mathbb{N}, <)$ ile $(\mathbb{N}, S)$ sıraları, birbirine izomorf değildir:

$<$	1,	2,	3,	…;	?	?	?	…
S	1,	3,	5,	…;	2,	4,	6,	…

$\mathbb{N}$ topluluğu sayılabilir mi? Normalde, sayarken, sayılar diyoruz. R sıralamasına göre $\mathbb{N}$ topluluğunu sayınca 1 için hangi sayıyı diyebiliriz? Yani yukarıdaki ilk tablonun alt satırındaki 1 numarasının üstünde, soru işaretinin yerine hangi sayıyı koyabiliriz? Bu sayı $\omega + 1$ olacak. Ondan sonra $\omega + 2$, $\omega + 3$, vesaire sayıları olacak; bunlardan sonra, $\omega + \omega$, yani $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot 2 + 1$, vesaire sayıları olacak. Ama $\mathbb{N}$ topluluğunun sadece ω tane elemanı olacak.

Aslında kümeler kuramcıları olarak sayarken, 0'dan başlayacağız:

	0,	1,	2,	…;	ω,	$\omega + 1$,	$\omega + 2$,	…
S	1,	3,	5,	…;	2,	4,	6,	…

Burada 0, 1, 2, 3, …; ω, $\omega+1$, $\omega+2$, …; $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot 2+1$, … numaraları, **ordinal sayılar** veya **ordinallerdir.** (Her ordinal, bu sırada bulunacak.) Ayrıca 0, 1, 2, 3, …, ω numaraları, **kardinal** (*cardinal*) **sayılar** veya **kardinaldirler** (başka kardinaller olacak); ama $\omega + 1$, bir kardinal değildir.

Her kardinal, bir ordinal olacak, ama her ordinal, bir kardinal olmayacak.

Her ordinal, bir **küme** olacak; ama bazı kümeler, ordinal olmayacak.

Her **küme,** bir topluluk olacak; ve her kümenin her elemanı, bir küme olacak. O zaman a ile b kümeyse, ya a kümesi, b kümesinin elemanıdır, ya da elemanı değildir. İlk durumda b kümesi, a kümesini **içerir** (*contains*), yani a kümesi, b kümesi tarafından **içerilir,** ve

$$a \in b$$

ifadesini yazarız;[§] ikinci durumda b kümesi, a kümesini **içermez,** ve

$$a \notin b$$

yazarız. Genelde C bir topluluk ise, ya $a \in C$ ya da $a \notin C$ olur.

Bize göre **boş bir topluluk**—elemanları olmayan bir topluluk—vardır, ve bu topluluk, bir kümedir. Bu varsayım, **Boş Küme Aksiyomudur** (*Empty Set Axiom* [18]). Boş kümenin işareti,

$$\varnothing$$

olur. Ayrıca a ile b kümeyse, o zaman öyle bir küme vardır ki her elemanı, ya a kümesinin bir elemanı, ya da b kümesinin kendisidir. Bu yeni kümenin ifadesi,

$$a \cup \{b\}$$

olur. Bu topluluğun küme olduğu, **Bitiştirme Aksiyomudur** (*Adjunction Axiom*).[¶] Burada a boş ise, yeni $a \cup \{b\}$ kümesi,

$$\{b\}$$

olarak yazılır. O zaman aşağıdaki gibi kümelerimiz vardır:

$$\varnothing, \quad \{\varnothing\}, \quad \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\}, \quad \Big(\{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\}\Big) \cup \Big\{\{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\}\Big\}.$$

Bu ifadelerin yerine

$$\varnothing, \quad \{\varnothing\}, \quad \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \qquad \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\Big\}$$

ifadelerini yazabiliriz. Aslında 0 sayısını $\varnothing$ olarak tanımlarız, yani

$$0 = \varnothing$$

[§]Buradaki $\in$ işareti, Yunan ε (epsilon) harfinden türer. Bu harf, ἐστί kelimesinin ilk harfidir, ve A ἐστί B cümlesi, "A, B'dir" (A *is* B) anlamına gelir. Epsilonun bu kullanışını, Peano [9] ortaya koymuştur.

[¶]Bu aksiyom, Tarski ve Givant [14, p. 223, QIII] kaynağında bulunur; İngilizce adı, Boolos [1, p. 100] kaynağında bulunur.

olur. Bu sayı, **ilk ordinaldir.** Her α ordinali için bir sonraki ordinal olacak, ve bu ordinal, $\alpha \cup \{\alpha\}$ olacak. Mesela 0'dan bir sonraki ordinal $\{0\}$ olacak; yani

$$1 = \{0\}$$

olacak. Ayrıca her α ordinal için

$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$$

olacak. Ama bildiğimiz gibi

$$1 + 1 = 2, \qquad 2 + 1 = 3, \qquad 3 + 1 = 4,$$

vesaire. O zaman

$$\begin{aligned} 2 &= 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}, \\ 3 &= 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}, \\ 4 &= 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}, \end{aligned}$$

vesaire. Böyle tanımlanmış sayılar, **von Neumann doğal sayıları** (*natural numbers* [16]) olur. Bu sayılar, bir topluluğu oluşturacak, ve bu topluluk, ω olacak. Yani ω, öyle bir topluluktur ki

1) $0 \in \omega$ olur,
2) $\alpha \in \omega$ ise $\alpha + 1 \in \omega$ olur, ve
3) ω topluluğunun başka elemanı yoktur.

Öyleyse ω topluluğunun tanımı, **rekürsif** veya **özyinelidir** (*recursive*).

1.2 Ordinaller Hesapları

Sonsuzluk Aksiyomuna[‖] (*Axiom of Infinity* [18]) göre ω topluluğu, bir küme olacak. O zaman ω bir ordinal olacak, ve bu ordinalin her k elemanı için $\omega + k$ kümesi, bir ordinal olacak.

Aslında tüm α ile β ordinaller için

$$\alpha + \beta \text{ toplamını}, \qquad \alpha \cdot \beta \text{ çarpımını, ve} \qquad \alpha^\beta \text{ kuvvetini}$$

[‖]Veya **Sonsuz Küme Aksiyomu** [8].

tanımlayacağız. O zaman

$$\begin{gathered}1+\omega=\omega<\omega+1,\\ 2\cdot\omega=\omega<\omega\cdot 2,\\ (\omega+1)^{\omega}=\omega^{\omega}<\omega^{\omega+1}\end{gathered}$$

olacak. Aslında:

- $1+\omega$ toplamı,

$$(0,0,1,2,3,\dots)$$

sırasının ordinalidir, ama $\omega+1$,

$$(0,1,2,3,\dots,0)$$

sırasının ordinalidir.

- $2\cdot\omega$ çarpımı,

$$(0,1,0,1,0,1,\dots)$$

sırasının ordinalidir, ama $\omega\cdot 2$,

$$(0,1,2,3,\dots,0,1,2,3,\dots)$$

sırasının ordinalidir; ayrıca

$$\begin{gathered}2\cdot\omega=2+2+2+\cdots,\\ \omega\cdot 2=\omega+\omega=\omega+1+1+1+\cdots\end{gathered}$$

olur.

- $(\omega+1)^{\omega}$ kuvveti,

$$((\omega+1)^2,(\omega+1)^3,(\omega+1)^4,\dots)$$

dizisinin **limitidir,** ve

$$\begin{aligned}(\omega+1)^2&=(\omega+1)\cdot(\omega+1)\\ &=(\omega+1)\cdot\omega+(\omega+1)\cdot 1\\ &=(\omega+1+\omega+1+\omega+1+\cdots)+\omega+1\\ &=(\omega+\omega+\omega+\cdots)+\omega+1\\ &=\omega^2+\omega+1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\omega+1)^3 &= (\omega+1)^2\cdot(\omega+1)\\
&= (\omega^2+\omega+1)\cdot(\omega+1)\\
&= (\omega^2+\omega+1)\cdot\omega+\omega^2+\omega+1\\
&= (\omega^2+\omega+1+\omega^2+\omega+1+\omega^2+\cdots)+\omega^2+\omega+1\\
&= (\omega^2+\omega^2+\cdots)+\omega^2+\omega+1\\
&= \omega^3+\omega^2+\omega+1,
\end{aligned}$$

ve genelde

$$(\omega+1)^n = \omega^n+\omega^{n-1}+\cdots+\omega+1$$

olur.

Ayrıca her pozitif α ordinali için öyle bir ℓ doğal sayısı, ve α_0, ..., α_ℓ ordinalleri, ve a_0, ..., a_ℓ pozitif doğal sayıları vardır ki

$$\alpha_0 > \cdots > \alpha_\ell, \qquad \alpha = \omega^{\alpha_0}\cdot a_0+\cdots+\omega^{\alpha_\ell}\cdot a_\ell$$

olur. Burada $\omega^{\alpha_0}\cdot a_0+\cdots+\omega^{\alpha_\ell}\cdot a_\ell$ ifadesi, α ordinalinin **Cantor normal biçimidir** (*Cantor normal form*). Her pozitif ordinalin tek bir Cantor normal biçimi vardır. Bundan hesaplama kuralları türeyebilir.

1.3 Kümeler ve Sınıflar

Her topluluk, bir küme değildir. Örneğin öyle bir R topluluğu vardır ki her elemanı bir küme, ama bu küme, kendisinin elemanı değildir. Yani

$$R = \{x\colon x\notin x\}$$

olur. Burada x değişkeni her zaman bir küme olacak. Şimdi a bir küme olsun. Eğer $a\in a$ ise, o zaman $a\notin R$, dolayısıyla $a\neq R$. Eğer $a\notin a$ ise, o zaman $a\in R$ olmalı, dolayısıyla $a\neq R$. Her durumda R topluluğu, a kümesi değildir. Yani R, bir küme değildir. Bu teoreme **Russell Paradoksu** denir.

Uygunluğumuz için her topluluğun her elemanı, bir küme olacak. Bazı topluluklar, **sınıf** olacak. Her küme, bir sınıftır, ancak bazı sınıflar, küme değildir. Mesela yukarıdaki gibi $\{x\colon x \notin x\}$ topluluğu, bir sınıftır, ama gösterdiğimiz gibi küme değildir. Tanıma göre her sınıf,

$$\{x\colon \varphi(x)\}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\varphi(x)$, kümeler kuramının mantığında bir **formüldür.** Eğer a bir kümeyse, o zaman $\varphi(a)$ ifadesi, bir **cümledir.** Her cümle, ya doğru ya yanlıştır. Bir $\{x\colon \varphi(x)\}$ sınıfının elemanları, öyle a kümeleridir ki $\varphi(a)$ cümlesi doğrudur. Bu sınıf, $\varphi(x)$ formülü tarafından **tanımlanır.**

Bir $\varphi(x)$ formülünün bir tek **serbest değişkeni** vardır, ve bu değişken, x olur. Ancak bir formülün birden fazla serbest değişkeni olabilir. Örneğin

$$\forall z\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$$

ifadesi, bir formüldür, ve serbest değişkenleri, x ile y olur. Bu formülde z, **bağlantılı değişkendir.** Formül, kümelerin **eşitlik** bağıntısını tanımlar. Yani a ile b kümeleri birbirine eşittir, ancak ve ancak

$$\forall z\ (z \in a \Leftrightarrow z \in b)$$

olur, yani elemanları aynıdır. Küme olmayan bir sınıfın olduğunu kanıtlarken, bu kuralı kullandık. Yukarıdaki $\forall z\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$ formülünün yerine

$$x = y$$

ifadesini yazarız. O halde bir $\{x\colon x = x\}$ sınıfı vardır, ve bu sınıf, tüm kümelerin sınıfıdır. Bu sınıf, **evrensel sınıftır,** (*universal class*) ve işareti,

$$\mathbf{V}$$

olacak. Ayrıca a bir kümeyse, o zaman bir $\{x\colon x \in a\}$ sınıfı vardır, ama bu sınıf, a kümenin kendisidir, yani

$$a = \{x\colon x \in a\}$$

olur. Öyleyse, dediğimiz gibi, her küme, bir sınıftır.

Sonsuzluk Aksiyomunu kullanmadan ω topluluğunun sınıf olduğu açık (apaçık, aşikâr) değildir, ama sınıf olacak.

Fakat bazı (kümelerden oluşturulmuş) topluluklar, sınıf değildir. Bu sonuç, **Gödel'in Eksiklik Teoremi** (*Gödel's Incompleteness Theorem* [4]) veya **Tarski'nin Doğruluğun Tanımlanamaması Teoremi** (*Tarski's Theorem on the Indefinability of Truth* [12]) gibidir. Bu teoremlerin asıl biçimleri, $\mathbb{N}$ topluluğu hakkındadır, ve bu biçimde teoremlerini kanıtlamak zordur. Fakat bu teoremler, **V** hakkında yazılabilir; ve bu biçimde onları kanıtlamak daha kolay olur.

Tüm ordinallerin topluluğu, bir sınıf olacak, ve bu sınıfın işareti

$$\mathbf{ON}$$

olacak. Aslında bu sınıf, bir a kümesiyse, o zaman $a \in \mathbf{ON}$ olurdu, yani $a \in a$ olurdu; ama bu içerme imkânsız. Sonuç olarak **ON**, bir küme değildir. Bu teorem, **Burali-Forti Paradoksu** olarak bilinir.

1.4 Kardinaller

ON sınıfının bir sıralaması vardır, ve bu sıralama, *içerilmedir,* yani $\in$ ile gösterilen sıralamadır. **Seçim Aksiyomuna** (*Axiom of Choice* [18]) göre, her a kümesinden bir β ordinaline giden bir **eşleme** (yani bir birebir örten gönderme) vardır. O halde

$$a \approx \beta$$

ifadesini yazalım, ve a ile β kümelerine **eşlenik** densin [8, s. 82]. Eğer a verilirse, ve $a \approx \beta$ koşulunu sağlayan β ordinallerinin en küçüğü κ ise, o zaman κ, a kümesinin **kardinalidir.** Tüm kardinallerden oluşturulmuş topluluk, bir sınıf olacak, ve bu sınıfın işareti

$$\mathbf{CN}$$

olacak. En küçük *sonsuz* kardinal, ω olur. **ON** sınıfından **CN** sınıfına giden bir

$$\alpha \mapsto \aleph_\alpha$$

göndermesi vardır. Burada

$$\aleph_0 = \omega$$

olur, ve

$$\alpha < \beta \iff \aleph_\alpha < \aleph_\beta$$

olur, ve her sonsuz kardinal, bir α ordinali için, $\aleph_\alpha$ biçimindedir. İki kardinalin *kardinal* toplamı ve *kardinal* çarpımı vardır, ve

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\max(\alpha,\beta)}$$

(daha kesinlikle $\aleph_\alpha +_{\mathrm{card}} \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot_{\mathrm{card}} \aleph_\beta = \aleph_{\max(\alpha,\beta)}$) olur. Ayrıca $1 \leqslant k < \omega$ ise

$$k + \aleph_\alpha = k \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$$

olur.

Genelde siyah harfler, sınıfları gösterecek. Şimdi $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$, sınıf olsun. Eğer $\boldsymbol{A}$ sınıfının her elemanı, $\boldsymbol{B}$ sınıfının elemanıysa, o zaman A sınıfına **$\boldsymbol{B}$ sınıfının altsınıfı** denir, ve

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$$

ifadesi yazılır. Bu durumda $\boldsymbol{B}$ sınıfı, $\boldsymbol{A}$ sınıfını **kapsar. Ayırma Aksiyomuna** (*Separation Axiom* [18]) göre, her *kümenin* her alt sınıfı, bir kümedir. Şimdi, eğer $\varphi(x)$ bir formül ise, ve a bir kümeyse, o zaman öyle bir sınıf vardır ki her elemanı, hem a kümesinin elemanıdır, hem de $\varphi(x)$ formülünü sağlar. Bu sınıf,

$$\{x \in a \colon \varphi(x)\}$$

olarak yazılır. Ayırma Aksiyomuna göre, bu sınıf, bir kümedir. O zaman bu küme, a kümesinin bir **altkümesidir.**

Bir a kümesinin tüm altkümeleri, bir sınıf oluşturur. Bu sınıf, a kümesinin **kuvvet sınıfıdır** (*power class*), ve

$$\mathscr{P}(a)$$

olarak yazılır. **Kuvvet Kümesi Aksiyomuna** (*Power Set Axiom* [18]) göre, bu sınıf, her zaman bir kümedir. **Cantor'un Teoremine**** göre, her kümenin kuvvet kümesi, kümeden kesinlikle daha büyüktür, yani kardinali daha büyüktür. Bu teorem,

$$a \prec \mathscr{P}(a)$$

**Levy'e [6] göre Cantor, bu teoremi 1892 yılında yayımladı.

ifadesiyle söylenir.

Eğer a ile b, iki kümeyse, o zaman a kümesinden b kümesine giden göndermeler topluluğu, bir kümedir, ve bu küme

$$^{a}b$$

olarak yazılabilir. O zaman

$$^{a}2 \approx \mathscr{P}(a)$$

olur. Eğer κ ile λ, iki kardinal ise, tanıma göre

$$\kappa^{\lambda}$$

kuvveti, $^{\lambda}\kappa$ kümesinin kardinalidir. Eğer $2 \leqslant \kappa \leqslant \lambda$ ise, o zaman

$$2^{\lambda} \leqslant \kappa^{\lambda} \leqslant (2^{\kappa})^{\lambda} = 2^{\kappa \cdot \lambda} = 2^{\lambda}$$

olur; özel olarak

$$\kappa^{\lambda} = 2^{\lambda}$$

olur.

Şimdi $\mathbb{Z}$, **tamsayılar** topluluğu olsun. O zaman

$$\mathbb{Z} \approx \omega$$

olur, çünkü tamsayılar, sonsuz bir

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, \dots$$

listede yazılabilir. Ayrıca her tamsayı, ω kümesinin elemanları gibi, bir küme olarak düşünülebilir. Bunu göstermek için, eğer a ile b, herhangi iki kümeyse, o zaman

$$(a, b)$$

sıralı ikilisi (*ordered pair*),

$$\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$$

kümesi olarak tanımlanır.[††] O zaman $n \in \omega$ ve $n > 0$ ise, o zaman $-n$ tamsayısı, $(0, n)$ olarak tanımlanabilir.

[††]Bu tanım, Kuratowski'nin [5]. Daha önce, Wiener [17] daha karmaşık bir tanım verdi.

Başka yöntemle $\mathbb{Z}$ topluluğunun her r elemanını, $\{(x,y) \in \omega\times\omega\colon x = y + r\}$ olarak tanımlanabiliriz. Bu tanıma göre $\mathbb{Z}$ topluluğunun her elemanı, bir **denklik sınıfıdır.** Aslında $\omega \times \omega$ çarpımında öyle bir E **denklik bağıntısı** vardır ki

$$(a,b)\ E\ (c,d) \iff a+d=b+c$$

olur, ve $\mathbb{Z}$ topluluğu, $\omega \times \omega/E$ bölümü olarak tanımlanabilir.

Öyleyse $\mathbb{Z}$ topluluğu, bir sınıftır. O zaman **Yerleştirme Aksiyomuna** (*Replacement Axiom*‡‡) göre $\mathbb{Z}$, bir küme olmalı, çünkü $\mathbb{Z} \approx \omega$.

Benzer şekilde $\mathbb{Q}$ **kesirli sayılar** topluluğu, öyle bir $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/F$ bölümüdür ki

$$(a,b)\ F\ (c,d) \iff ad=bc$$

olur. Aslında

$$\mathbb{Q} \approx \omega$$

olur, çünkü pozitif tamsayılar, 1.1 numaralı figürdeki ağaç olarak, ve ondan sonra bir liste olarak, yazılabilir.

Şimdi $\mathbb{R}$, **gerçel sayılar** topluluğu olsun. Her kesirli sayı, gerçel sayı olarak düşünülebilir. Ayrıca her iki farklı gerçel sayının arasında bir kesirli sayı vardır. O zaman $\mathbb{R}$ topluluğundan $\mathscr{P}(\mathbb{Q})$ kuvvet kümesine giden öyle bir f göndermesi vardır ki her a gerçel sayısı için

$$f(a) = \{x \in \mathbb{Q}\colon x < a\}$$

olur, ve bu gönderme, birebirdir. Öyleyse a sayısı, $f(a)$ kümesi olarak düşünebilir, ve $\mathbb{R}$, bir küme olur. Ayrıca

$$\mathbb{R} \preccurlyeq \mathscr{P}(\mathbb{Q}) \approx \mathscr{P}(\omega)$$

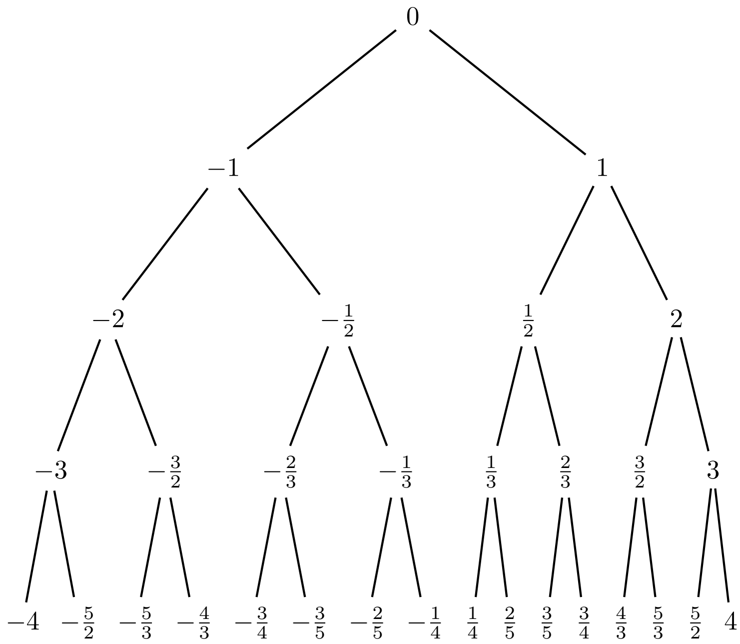
olur. Aslında

$$\mathscr{P}(\omega) \preccurlyeq \mathbb{R}$$

de olur. Örneğin

$$\mathscr{P}(\omega) \approx {}^{\omega}2$$

‡‡Skolem [11], 1922 yılında bu aksiyomu tavsiye etti; aynı yılda Fraenkel, benzer bir aksiyomu tavsiye etmiş. Ayrıca Cantor'a [2, p. 114] bakınız.



Şekil 1.1 Stern–Brocot Ağacı

çünkü ${}^{\omega}2$ kümesinden $\mathscr{P}(\omega)$ kümesine giden bir

$$f \mapsto \{x \colon x \in \omega \land f(x) = 1\}$$

eşlemesi vardır, ve ayrıca ${}^{\omega}2$ kümesinden $\mathbb{R}$ kümesine giden bir birebir

$$f \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot f(k)}{3^{k+1}}$$

göndermesi vardır. Öyleyse

$$\mathbb{R} \preccurlyeq \mathscr{P}(\omega) \preccurlyeq \mathbb{R}$$

olur. Sonuç olarak, **Schröder–Bernstein Teoremine** göre

$$\mathbb{R} \approx \mathscr{P}(\omega)$$

olur, çünkü o teoreme göre tüm a ile b kümeleri için

$$a \preccurlyeq b \preccurlyeq a \implies a \approx b$$

olur.

Şimdi Cantor'un Teoreminden

$$\omega \prec \mathbb{R}$$

olur. Özel olarak öyle bir α olacak ki $\alpha > 0$ ve

$$\mathbb{R} \approx \aleph_\alpha$$

olur. Ama α ordinalinin 1 olup olmadığını bilmiyoruz. **Kontinü Hipotezi** (*Continuum Hypothesis*), $\mathbb{R} \approx \aleph_1$ denkliğinin doğru olmasıdır.

Seçim Aksiyomu hariç kümeler kuramının kullanacağımız aksiyomları, **Zermelo–Fraenkel Aksiyomlarıdır.** Aslında Zermelo'nun verdiği aksiyomlar [18], aşağıdadır.

I. *Uzama* (23 numaralı sayfada).
II. **Temel Kümeler** (*Elementary Sets*): $\varnothing$, $\{a\}$, ve $\{a, b\}$ toplulukları, kümedir.
III. Ayırma (10 numaralı sayfada).
IV. Kuvvet Kümesi (10 numaralı sayfada).
V. **Bileşim** (*Union*): her a kümesi için, $\bigcup a$ bileşimi de bir kümedir (27 numaralı sayfaya bakınız).
VI. Seçim (9 numaralı sayfada).
VII. Sonsuzluk (5 numaralı sayfada).

(4 numaralı sayfadaki Bitiştirme Aksiyomumuz, Zermelo'nun II. ve V. aksiyomları tarafından gerektirilir. Ters olarak Bitiştirme ve Boş Küme Aksiyomlarımız, Zermelo'nun II. aksiyomunu gerektirir.) Sonra iki aksiyom daha verildi:

VIII. Yerleştirme (12 numaralı sayfada).
IX. **Temellendirme** (*Foundation* [11]): Her boş olmayan a kümesinin öyle bir b elemanı vardır ki $a \cap b = \varnothing$ olur (26 numaralı sayfaya bakınız).

I–V ile VII–IX numaralı aksiyomlar, Zermelo–Fraenkel Aksiyomlarıdır.

Seçim Aksiyomu, Zermelo–Fraenkel Aksiyomları, Zermelo–Fraenkel Aksiyomlarıyla Seçim Aksiyomu, ve Kontinü Hipotezi sırasıyla

$$\mathrm{AC}, \qquad \mathrm{ZF}, \qquad \mathrm{ZFC}, \qquad \mathrm{CH}$$

olarak yazılır. Özel olarak

$$\mathrm{ZFC} = \mathrm{ZF} + \mathrm{AC}$$

olur. Gödel'in kanıtladığı teoreme göre ZF **tutarlıysa** (yani ondan bir çelişki çıkmazsa), o zaman ZFC aksiyomları da tutarlıdır, ve ayrıca ZFC aksiyomlarıyla CH tutarlıdır. Cohen'in kanıtladığı teoreme göre ZF tutarlıysa, $\mathrm{ZF}+\neg\mathrm{AC}$ aksiyomları da tutarlıdır, ve ayrıca $\mathrm{ZFC}+\neg\mathrm{CH}$ tutarlıdır. (Gödel'in ve Cohen'in teoremlerini kanıtlamayacağız.)

2 Mantık

2.1 Formüller

Formüllerde kullanacağımız simgelerin birkaç tane türü vardır:

1) **değişkenler** (*variables*): z, y, x, $\ldots$; x_0, x_1, x_2, $\ldots$;
2) **sabitler** (*constants*): a, b, c, $\ldots$; a_0, a_1, a_2, $\ldots$;*
3) **ikili bağlayıcılar** (*binary connectives*): $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$;†
4) bir **birli bağlayıcı** (*singulary connective*): $\neg$;
5) **niceleyiciler** (*quantifiers*): $\exists$, $\forall$;
6) **ayraçlar** (*parentheses, brackets*): (,);
7) bir **yüklem** (*predicate*): $\in$ (epsilon).‡

Bir **terim** (*term*), ya değişken ya da sabittir. Eğer t ile u, iki terim ise, o zaman

$$t \in u$$

ifadesi, bir **bölünemeyen formüldür** (*atomic formula*). Genelde **formüllerin** tanımı, rekürsiftir:

1. Bölünemeyen bir formül, bir formüldür.
2. Eğer φ, bir formül ise, o zaman

$$\neg\varphi$$

ifadesi de bir formüldür.

*Bilinen değerler için Latin alfabesinin başlangıcından harflerin kullanılışı, ve bilinmeyen değerler için Latin alfabesinin sonundan harflerin kullanılışı, Descartes'te [3] görünür.

†Bazen $\Rightarrow$ ile $\Leftrightarrow$ oklarının yerine $\to$ ile $\leftrightarrow$ işaretleri yazılır. Bunları kalemle yazmak daha kolaydır. Ama bu notlarda, $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ ifadesi, $\boldsymbol{F}$ göndermesinin $\boldsymbol{A}$ sınıfından $\boldsymbol{B}$ sınıfına gittiğinin anlamına gelecek. Aşağıdaki 36 numaralı sayfaya bakınız.

‡Yukarıdaki 4 numaralı sayfadaki dipnota bakınız.

3. Eğer φ ile ψ, iki formül ise, o zaman

$$(\varphi \land \psi), \qquad (\varphi \lor \psi), \qquad (\varphi \Rightarrow \psi), \qquad (\varphi \Leftrightarrow \psi)$$

   ifadeleri de, formüldür.
4. Eğer φ bir formül ise, ve x bir değişken ise, o zaman

$$\exists x\ \varphi, \qquad \forall x\ \varphi$$

   ifadeleri de formüldür.

Formüllerin her türünün adı vardır:

1. $\neg\varphi$ formülü, bir **değillemedir** (*negation*).
2. $(\varphi \land \psi)$ formülü, bir **birleşme** veya **tümel evetlemedir** (*conjunction*).
3. $(\varphi \lor \psi)$ formülü, bir **ayrılma** veya **tikel evetlemedir** (*disjunction*).
4. $(\varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, bir **karıştırmadır** (*implication*).
5. $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ formülü, bir **denkliktir** (*equivalence*).
6. $\exists x\ \varphi$ formülü, bir **örneklemedir** (*instantiation*).
7. $\forall x\ \varphi$ formülü, bir **genelleştirmedir** (*generalization*).

Bu türlerin adları, çok önemli değildir. Fakat aşağıdaki teorem çok önemlidir.

Teorem 1. *Her formülün tek bakımdan tek bir türü vardır.*

Mesela aynı formül, hem karıştırma, hem örnekleme olamaz: $\exists x\ (\varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, karıştırma değil, örneklemedir; $(\exists x\ \varphi \Rightarrow \psi)$ formülü, örnekleme değil, karıştırmadır.

Ayrıca $(\varphi \land (\psi \land \theta))$ formülü, tek bakımdan birleşmedir. Aslında sadece φ ile $(\psi \land \theta)$ formüllerinin birleşmesidir. Eğer A harfi, $\varphi \land (\psi$ ifadesini gösterirse ve B harfi, $\theta)$ ifadesini gösterirse, o zaman $(A \land B)$ ifadesi, $(\varphi \land (\psi \land \theta))$ formülünü gösterir; ama tanıma göre bu formül, A ile B ifadelerinin birleşmesi değildir, çünkü A ile B ifadeleri (yani A ile B tarafından gösterilen ifadeler), formül değildir.

Teoremi kanıtlamayacağız. Fakat teoremi kullanarak aşağıdaki rekürsif tanımı yapabiliriz. Bir değişkenin bir formülde birkaç tane **geçişi** (*occurrence*) olabilir. Mesela $\forall x\ (x \in y \Leftrightarrow x \in z)$ formülünde x değişkeninin üç tane geçişi vardır (ve y ile z değişkenlerinin birer geçişi vardır).

1. Bölünemeyen bir formülde bir değişkenin her geçişi, **serbest** bir geçiştir.
2. Bir değişkenin φ formülündeki her serbest geçişi, $\neg\varphi$, $(\varphi * \psi)$, ve $(\psi * \varphi)$ formüllerinde de serbesttir. (Burada $*$ işareti, herhangi bir ikili bağlayıcıdır.)
3. Eğer x ile y, iki *farklı* değişken ise, o zaman x değişkeninin φ formülünde her serbest geçişi, $\exists y\ \varphi$ ile $\forall y\ \varphi$ formüllerinde de serbesttir.
4. $\exists x\ \varphi$ ile $\forall x\ \varphi$ formüllerinde x değişkeninin hiç serbest geçişi yoktur.

Bir formülde bir değişkenin serbest geçişi varsa, bu değişken, formülün bir **serbest değişkenidir.** Serbest değişkeni olmayan bir formül, bir **cümledir.** Cümleler için σ, τ, ve ρ gibi Yunan harflerini kullanacağız.

2.2 Doğruluk ve Yanlışlık

Bir φ formülünün tek serbest değişkeni x ise, o zaman formül

$$\varphi(x)$$

olarak yazılabilir. O halde a bir sabit ise, ve x değişkeninin φ formülündeki her serbest geçişinin yerine a konulursa, çıkan cümle

$$\varphi(a)$$

olarak yazılabilir. Şimdi **doğruluğu** (*truth*) ve **yanlışlığı** (*falsehood*) tanımlayabiliriz:

1. Eğer b kümesi, a kümesini içerirse, o zaman $a \in b$ cümlesi doğrudur; içermezse, yanlıştır.
2. Eğer σ cümlesi doğruysa, o zaman $\neg\sigma$ değillemesi yanlıştır; σ yanlış ise, $\neg\sigma$ doğrudur.
3. Eğer hem σ hem τ doğruysa, o zaman $(\sigma\wedge\tau)$ birleşmesi de doğrudur; σ ile τ cümlelerinin biri yanlış ise, birleşmesi de yanlıştır.
4. Eğer bir a kümesi için $\varphi(a)$ cümlesi doğruysa, o zaman $\exists x\ \varphi(x)$ örneklemesi de doğrudur; hiç öyle bir a yoksa, örnekleme yanlıştır.
5. $(\sigma \vee \tau)$ cümlesi, $\neg(\neg\sigma \wedge \neg\tau)$ cümlesinin anlamına gelir, yani bu iki cümle aynı zamanda ya doğrudur, ya da yanlıştır.
6. $(\sigma \Rightarrow \tau)$ cümlesi, $(\neg\sigma \vee \tau)$ cümlesinin anlamına gelir.

7. $(\sigma \Leftrightarrow \tau)$ cümlesi, $\big((\sigma \Rightarrow \tau) \land (\tau \Rightarrow \sigma)\big)$ cümlesinin anlamına gelir.
8. $\forall x\ \varphi(x)$ cümlesi, $\neg\exists x\ \neg\varphi(x)$ cümlesinin anlamına gelir.

Özel olarak formüllerde $\lor$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, ve $\forall$ simgeleri gerekmez; sadece kolaylık için kullanacağız. Ama $(\sigma \Rightarrow \tau)$ cümlesi doğrudur ancak ve ancak τ doğru veya σ yanlıştır; ve $(\sigma \Leftrightarrow \tau)$ cümlesi doğrudur ancak ve ancak hem σ hem τ ya doğru ya yanlıştır. Ayrıca $\forall x\ \varphi(x)$ doğrudur ancak ve ancak her a için $\varphi(a)$ doğrudur.

Birkaç tane daha kısaltma kullanırız:

1. $\neg\, t \in u$ formülünün yerine $t \notin u$ ifadesini yazarız;
2. Bir $(\varphi * \psi)$ formülünün en dıştaki ayraçlarını yazmayız.
3. $\Rightarrow$ ile $\Leftrightarrow$ bağlayıcılarına göre $\land$ ile $\lor$ bağlayıcılarına önceliği veririz: Mesela $\varphi \land \psi \Rightarrow \chi$ ifadesi, $(\varphi \land \psi) \Rightarrow \chi$ formülünün anlamına gelir.
4. $\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$ ifadesi, $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)$ formülünün anlamına gelir.

Bir φ formülünün serbest değişkenleri x ile y ise, o zaman formül

$$\varphi(x, y)$$

olarak yazılabilir. O halde a ile b, iki sabit ise, ve x değişkeninin φ formülündeki her serbest geçişinin yerine a konulursa, ve benzer şekilde y değişkeninin her serbest geçişinin yerine b konulursa, çıkan cümle

$$\varphi(a, b)$$

olarak yazılabilir.

Genelde φ formülünün serbest değişkenleri, bir $\vec{x}$ listesini oluşturursa, o zaman formül

$$\varphi(\vec{x})$$

olarak yazılabilir; ayrıca

$$\forall \vec{x}\ \varphi(\vec{x}), \qquad \exists \vec{x}\ \varphi(\vec{x})$$

cümleleri yazılabilir. Eğer $\vec{a}$, uzunluğun $\vec{x}$ listesinin uzunluğu olan bir sabit listesiyse, o zaman

$$\varphi(\vec{a})$$

cümlesi de çıkar. Eğer $\varphi(\vec{x})$ ile $\psi(\vec{x})$, iki formül ise, ve sadece doğruluğun tanımını kullanarak

$$\forall\vec{x}\ \big(\varphi(\vec{x}) \Leftrightarrow \psi(\vec{x})\big)$$

cümlesinin doğruluğu kanıtlanabilirse, o zaman φ ile ψ birbirine **(mantığa göre) denktir** (*logically equivalent*). Öyleyse φ ile ψ birbirine denktir, ancak ve ancak her $\vec{a}$ sabit listesi için, doğruluğun tanımına göre

$$\varphi(\vec{a}) \Leftrightarrow \psi(\vec{a})$$

cümlesi doğrudur. Örneğin, yukarıdaki tanımlara göre

$$\begin{gathered}\varphi \lor \psi \text{ denktir } \neg(\neg\varphi \land \neg\psi),\\ \varphi \Rightarrow \psi \text{ denktir } \neg\varphi \lor \psi,\\ \varphi \Leftrightarrow \psi \text{ denktir } (\varphi \Rightarrow \psi) \land (\psi \Rightarrow \varphi),\\ \forall x\ \varphi \text{ denktir } \neg\exists x\ \neg\varphi.\end{gathered}$$

Teorem 2. *1. Her formül, kendisine denktir.*

2. Eğer φ ile ψ denk ise, o zaman ψ ile φ denktir.

3. Eğer φ ile ψ denk ise, ve ψ ile χ denk ise, o zaman φ ile χ denktir.

Yani

$$\begin{gathered}\varphi \textit{ denktir } \varphi,\\ \varphi \textit{ denktir } \psi \implies \psi \textit{ denktir } \varphi,\\ \varphi \textit{ denktir } \psi \ \&\ \psi \textit{ denktir } \chi \implies \varphi \textit{ denktir } \chi.\end{gathered}$$

Kanıt. 1. $\sigma \Leftrightarrow \sigma$ her zaman doğrudur.

2. $\sigma \Leftrightarrow \tau$ doğru olsun. O zaman hem σ hem τ ya doğru ya yanlıştır. Öyleyse hem τ hem σ ya doğru ya yanlıştır; yani $\tau \Leftrightarrow \sigma$ doğrudur.

3. $\sigma \Leftrightarrow \tau$ ve $\tau \Leftrightarrow \rho$ doğru olsun. Eğer σ doğruysa, o zaman τ doğru olmalı, ve sonuç olarak ρ doğru olmalı, dolayısıyla $\sigma \Leftrightarrow \rho$ doğrudur. Benzer şekilde σ yanlış ise $\sigma \Leftrightarrow \rho$ tekrar doğrudur. □

Teorem 3.

1. $\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \chi$ ile $\varphi \land \psi \Rightarrow \chi$ denktir.

2. *Eğer x değişkeni, φ formülünde serbest değilse, o zaman $\forall x\ (\varphi \Rightarrow \psi)$ ile $\varphi \Rightarrow \forall x\ \psi$ denktir.*

Kanıt. 1. $\sigma \Rightarrow \tau \Rightarrow \rho$ doğru olsun. Eğer $\sigma \wedge \tau$ cümlesi de doğruysa, o zaman hem σ hem τ doğrudur, ve sonuç olarak $\tau \Rightarrow \rho$ doğrudur, ve ρ doğrudur. Yani $\sigma \wedge \tau \Rightarrow \rho$ doğrudur.

Tersi için $\sigma \wedge \tau \Rightarrow \rho$ doğru olsun. O zaman $\sigma \wedge \tau$ yanlış veya ρ doğrudur. Yani σ yanlış, veya τ yanlış, veya ρ doğrudur. Eğer σ doğruysa, o zaman τ yanlış, veya ρ doğrudur, yani $\tau \Rightarrow \rho$ doğrudur. Sonuç olarak $\sigma \Rightarrow \tau \Rightarrow \rho$ doğrudur.

2. $\forall x\ (\sigma \Rightarrow \varphi(x))$ doğru olsun. O zaman her a için $\sigma \Rightarrow \varphi(a)$ doğrudur. Sonuç olarak σ doğruysa, o zaman her a için $\varphi(a)$ doğrudur. Yani $\sigma \Rightarrow \forall x\ \varphi(x)$ doğrudur.

Benzer şekilde $\sigma \Rightarrow \forall x\ \varphi(x)$ doğruysa $\forall x\ (\sigma \Rightarrow \varphi(x))$ doğrudur. □

2.3 Eşitlik

Yukarıdaki 8 numaralı sayfada dediğimiz gibi $t = u$ ifadesi, $\forall x\ (x \in t \Leftrightarrow x \in u)$ formülünün kısaltması olarak kullanılabilir. Burada x, herhangi bir değişken olabilir, ama t ile u terimlerinden farklı olmalıdır. Bu tanıma göre

$$t = u \text{ denktir } \forall x\ (x \in t \Leftrightarrow x \in u).$$

O zaman

$$\forall x\ \forall y\ (x = y \Leftrightarrow \forall z\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \tag{$*$}$$

cümlesi doğrudur. Yani tüm a ile b kümeleri için

$$a = b \Leftrightarrow \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b)$$

cümlesi doğrudur. Bu cümle, $\Leftrightarrow$ simgesinin tanımına göre, iki cümlenin birleşmesidir, ve bu cümleler,

$$a = b \Rightarrow \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b), \qquad \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow a = b$$

olur. O zaman tüm a ile b kümeleri için, hem

$$\forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow a = b$$

doğrudur, hem de, 3 numaralı teoreme göre, her c kümesi için,

$$a = b \wedge c \in a \Rightarrow c \in b$$

doğrudur.

Bizim için, $(*)$ cümlesinin doğruluğu, bir tanımdır. Yani, simgesi $\in$ olan **içerilme** bağıntısı, temel bir bağıntıdır, ama **eşitlik** bağıntısı, yukarıdaki $(*)$ cümlesini sağlayan bir $=$ bağıntısıdır.

Teorem 4. *Tüm a, b, ve c kümeleri için*

$$a = a, \qquad a = b \Rightarrow b = a, \qquad a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$$

cümleleri doğrudur.

Bu teoreme göre eşitlik bağıntısı, **dönüşlü** (*reflexive*), **simetrik** (*symmetric*), ve **geçişli** (*transitive*) bir bağıntıdır, yani bir **denklik bağıntısıdır** (*equivalence relation*).

Alıştırma 1. Teoremi kanıtlayınız.

Teoremin dolayısıyla $a = b \wedge b = c$ cümlesinin kısaltması olarak $a = b = c$ ifadesi yazılır; yani

$$a = b = c \text{ denktir } a = b \wedge b = c.$$

İlk resmi aksiyomumuz şu:

AKSİYOM 1 (Eşitlik)**.** *Tüm a, b, ve c kümeleri için*

$$a = b \wedge a \in c \Rightarrow b \in c$$

cümlesi doğrudur.

Bu aksiyomun başka biçimleri vardır, mesela:

1. Tüm a, b, ve c kümeleri için $a = b \Rightarrow a \in c \Rightarrow b \in c$ olur.
2. Tüm a ile b kümeleri için $\forall x\ (a = b \Rightarrow a \in x \Rightarrow b \in x)$ olur.
3. Tüm a ile b kümeleri için $\forall x\ (a = b \wedge a \in x \Rightarrow b \in x)$ olur.
4. Tüm a ile b kümeleri için $a = b \Rightarrow \forall x\ (a \in x \Rightarrow b \in x)$ olur.

5. $\forall x\ \forall y\ (x = y \Rightarrow \forall z\ (x \in z \Rightarrow y \in z))$ olur.
6. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x = y \Rightarrow x \in z \Rightarrow y \in z)$ olur.
7. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x = y \land x \in z \Rightarrow y \in z)$ olur.

Alıştırma 2. $a = b \land \forall x\ (a \in x \Rightarrow b \in x)$ cümlesi, Eşitlik Aksiyomundan kanıtlanabilir mi?

Teorem 5. *Her $\varphi(x)$ tek serbest değişkenli formülü için*

$$a = b \land \varphi(a) \Rightarrow \varphi(b) \tag{$\dagger$}$$

cümlesi doğrudur.

Kanıt. Formüllerin rekürsif tanımı nedeni ile, *tümevarım* kullanabiliriz.

1. İlk olarak φ bölünemesin. Yani $\varphi(x)$, ya $c \in x$ veya $x \in c$ biçiminde olsun. O zaman ($\dagger$) cümlesi, ya eşitliğin tanımından, ya da Eşitlik Aksiyomundan, doğrudur.

2. Eğer φ, ya ψ ya da χ ise, ($\dagger$) doğru olsun. Şimdi $a = b \land (\psi(a) \land \chi(a))$ doğru olsun. O zaman hem $a = b \land \psi(a)$ ve $a = b \land \chi(a)$ doğru olmalı. Sonuç olarak varsayımımızdan hem $\psi(b)$ hem $\chi(b)$ doğru olmalı, yani $\psi(b) \land \chi(b)$ doğru olmalı. Öyleyse φ, $\psi \land \chi$ ise ($\dagger$) doğrudur.

3. Son olarak, tüm c için $\varphi(x)$, $\psi(x, c)$ ise, ($\dagger$) doğru olsun. Şimdi $a = b \land \exists y\ \varphi(a, y)$ doğru olsun. O zaman bir c için $a = b \land \varphi(a, c)$ doğru olmalı, dolayısıyla $\varphi(b, c)$ doğru olmalı. Sonuç olarak $\exists y\ \varphi(b, y)$ doğrudur. Öyleyse $\varphi(x)$, $\exists y\ \varphi(x, y)$ ise ($\dagger$) doğrudur. □

Kitapların çoğunda hem $\in$ hem $=$, temel bağıntıdır, ve yukarıdaki 21 numaralı sayfadaki ($*$) cümlesi, tanım değil, **Uzama Aksiyomudur**[§] (*Axiom of Extensionality* [18]). Bu kitaplarda her $\varphi(x)$ tek serbest değişkenli formülü için ($\dagger$) cümlesi, bir **mantıksal aksiyomdır.**

[§] Veya **Küme Eşitliği Aksiyomu** [8].

2.4 Sınıflar

Bir $\varphi(x)$ formülü ve bir a kümesi için $\varphi(a)$ cümlesi doğruysa a kümesi, $\varphi(x)$ formülünü **sağlar** (*satisfies*). O zaman φ formülünü sağlayan kümeler topluluğu vardır. Bu topluluk

$$\{x\colon \varphi(x)\}$$

olarak yazılır, ve ona φ **tarafından tanımlanmış sınıf** (*class defined by* φ) denir.

Yukarıdaki 16 numaralı sayfadaki tanıma göre bir değişken veya sabit, bir *terimdir.* Daha kesinlikle bir **küme terimidir** (*set term*). Şimdi, eğer x değişkeni, φ formülünün serbest bir değişkeniyse, φ formülünü

$$\varphi(\dots x \dots)$$

olarak yazarız. O zaman

$$\{x\colon \varphi(\dots x \dots)\}$$

ifadesi, bir **sınıf terimi** (*class term*) olacak. Sınıf terimlerini formüllerde kullanabiliriz, ama şimdilik, sadece $\in$ işaretinin sağında. Bir x değişkeninin bir $\varphi(\dots y \dots)$ formülündeki serbest geçişi, bir

$$t \in \{y\colon \varphi(\dots y \dots)\}$$

formülünde (hâlâ) serbesttir. Eğer x değişkeninin $\varphi(\dots x \dots)$ formülünündeki her serbest geçişinin yerine a sabitini koyarsak $\varphi(\dots a \dots)$ formülü çıkar. Şimdi tanıma göre

$$a \in \{x\colon \varphi(\dots x \dots)\} \text{ denktir } \varphi(\dots a \dots).$$

Bir sabit veya bir $\{x\colon \varphi(x)\}$ sınıf terimi, **kapalı** (*closed*) bir terimdir. Kapalı bir terim, bir kümenin veya bir sınıfın adıdır. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ gibi büyük siyah harfleri kapalı sınıf terimleri olarak kullanacağız. O zaman 21 numaralı sayfadaki tanıma göre

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \text{ denktir } \forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{B}),$$
$$a = \boldsymbol{B} \text{ denktir } a = \forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{B}).$$

Sonuç olarak

$$a = \{x : x \in a\}$$

olur. Yani her küme, bir sınıfa eşittır. Ama tersi yanlıştır; bildiğimiz gibi bazı sınıflar hiçbir kümeye eşit değildir:

Teorem 6 (Russell Paradoksu)**.** *$\{x : x \notin x\}$ sınıfı, hiçbir kümeye eşit değildir.*

Kanıt. Bu teoremi zaten 7 numaralı sayfada kanıtladık. Şimdi bir kanıt daha vereceğiz. $x \notin x$ formülü tarafından tanımlanmış sınıf, $\boldsymbol{A}$ olsun. O zaman her b kümesi için

$$b \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow b \notin b$$

doğrudur. O zaman $\forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow x \in b)$ cümlesi yanlıştır. Eşitliğin tanımına göre $b \neq \boldsymbol{A}$ olur. □

Şimdi sınıf terimlerini $\in$ işaretinin solunda kullanabiliriz, ama çıkan cümle doğru olacağı için sınıf terimi bir kümeyi adlandırmalı:

$$\boldsymbol{A} \in b \text{ denktir } \exists x\ (x = \boldsymbol{A} \land x \in b).$$

Eğer $\forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in \boldsymbol{B})$ doğruysa, o zaman $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ sınıfının **altsınıfıdır** (*subclass*), ve $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ ifadesini yazarız. Yani

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \text{ denktir } \forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in \boldsymbol{B}).$$

Teorem 7.

1. *Tüm $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıfları için*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \textit{ denktir } \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \land \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}.$$

2. *Tüm $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, ve $\boldsymbol{C}$ sınıfları için*

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \land \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{C}$$

cümlesi (mantığa göre) doğrudur.

Alıştırma 3. Teoremi kanıtlayınız.

2.5 İşlemler

Sınıflarla birkaç tane ikili işlem vardır:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} &= \{x \colon x \in \boldsymbol{A} \wedge x \in \boldsymbol{B}\}, \\ \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} &= \{x \colon x \in \boldsymbol{A} \vee x \in \boldsymbol{B}\}, \\ \boldsymbol{A} \bigtriangleup \boldsymbol{B} &= \{x \colon (x \in \boldsymbol{A} \wedge x \notin \boldsymbol{B}) \vee (x \notin \boldsymbol{A} \wedge x \in \boldsymbol{B})\} \\ &= \{x \colon \neg(x \in \boldsymbol{A} \Leftrightarrow x \in \boldsymbol{B})\}. \end{aligned}$$

Bunlar sırasıyla $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıflarının **kesişimi** (*intersection*), **bileşimi** (*union*), ve **simetrik farkıdır** (*symmetric difference*). Ayrıca

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \smallsetminus \boldsymbol{B} &= \{x \colon x \in \boldsymbol{A} \wedge x \notin \boldsymbol{B}\} \\ &= \{x \colon \neg(x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in \boldsymbol{B})\}; \end{aligned}$$

bu sınıf, $\boldsymbol{A}$ sınıfının $\boldsymbol{B}$ sınıfından **farkıdır** (*difference*).

Teorem 8. *Tüm $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıfları için*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \bigtriangleup \boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{A} \smallsetminus \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B} \smallsetminus \boldsymbol{A}) \\ &= (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \smallsetminus (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}). \end{aligned}$$

Alıştırma 4. Teoremi kanıtlayınız.

7 numaralı teorem sayesinde bir $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C}$ cümlesinin yerine

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C}$$

ifadesini yazabiliriz.

Teorem 9. *Tüm $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıfları için*

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}.$$

Alıştırma 5. Teoremi kanıtlayınız.

Sınıflarda bir *birli* işlem vardır:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{c}} = \{x \colon x \notin \boldsymbol{A}\};$$

bu sınıf, $\boldsymbol{A}$ sınıfının **tümleyenidir** (*complement*).

Teorem 10 (De Morgan Kuralları)**.** *Tüm $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıfları için*

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})^{\mathrm{c}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{c}} \cup \boldsymbol{B}^{\mathrm{c}}, \qquad (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})^{\mathrm{c}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{c}} \cap \boldsymbol{B}^{\mathrm{c}}.$$

Alıştırma 6. Teoremi kanıtlayınız.

İçerilme bağıntısını kullanarak birkaç tane birli işlemi daha tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned}
\bigcap \boldsymbol{A} &= \{x \colon \forall y\ (y \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \in y)\},\\
\bigcup \boldsymbol{A} &= \{x \colon \exists y\ (x \in y \wedge y \in \boldsymbol{A})\},\\
\mathscr{P}(\boldsymbol{A}) &= \{x \colon \forall y\ (y \in x \Rightarrow y \in \boldsymbol{A})\}\\
&= \{x \colon x \subseteq \boldsymbol{A}\};
\end{aligned}$$

bunlar sırasıyla $\boldsymbol{A}$ sınıfının **kesişimi** (*intersection*), **bileşimi** (*union*), ve **kuvvet sınıfıdır** (*power class*).

Teorem 11. *Eğer $a \in \boldsymbol{B}$ ise*

$$\bigcap \boldsymbol{B} \subseteq a \subseteq \bigcup \boldsymbol{B}$$

doğrudur.

Alıştırma 7. Teoremi kanıtlayınız.

Son olarak 8 numaralı sayfadaki gibi

$$\mathbf{V} = \{x \colon x = x\},$$

ve

$$\begin{gathered}
\varnothing = \{x \colon x \neq x\},\\
\{a\} = \{x \colon x = a\},\\
\{a, b\} = \{x \colon x = a \vee x = b\},\\
\{a, b, c\} = \{x \colon x = a \vee x = b \vee x = c\},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}$$

Buradaki $\varnothing$ sınıfı, **boş sınıftır.**

Bu altbölümün

$$
\begin{array}{cccc}
\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}, & \boldsymbol{A}^{\mathrm{c}}, & & \varnothing, \\
\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}, & \bigcap \boldsymbol{A}, & \mathbf{V}, & \{a\}, \\
\boldsymbol{A} \vartriangle \boldsymbol{B}, & \bigcup \boldsymbol{A}, & & \{a, b\}, \\
\boldsymbol{A} \smallsetminus \boldsymbol{B}, & \mathscr{P}(\boldsymbol{A}), & & \{a, b, c\}
\end{array}
$$

ifadeleri, *sınıf* terimidir. Her $\boldsymbol{A}$ veya $\boldsymbol{B}$ teriminin yerine başka bir terimi koyabiliriz. Zaten bu şekilde $(\boldsymbol{A} \smallsetminus \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B} \smallsetminus \boldsymbol{A})$ gibi ifadeleri yazdık. Fakat şimdilik küçük harfler hariç, küme terimlerimiz yoktur. Bu durum hemen değişecek.

3 Doğal Sayılar

3.1 Doğal sayılar kümesi

18 numaralı sayfadaki tanıma göre $\exists x\ x = a$ cümlesi doğru mudur? Yani $\exists x\ \forall y\ (y \in x \Leftrightarrow y \in a)$ cümlesi doğru mudur? Eğer bir b kümesi için $b = a$ cümlesi, yani $\forall y\ (y \in b \Leftrightarrow y \in a)$ cümlesi, doğruysa, o zaman $\exists x\ x = a$ cümlesi de doğrudur. Aslında 4 numaralı teoreme göre $a = a$ cümlesi doğru, değil mi? O halde $\exists x\ x = a$ cümlesi doğru olmalı.

Ama bu iddia pek doğru değildir. Bir a kümesi varsa, o zaman $\exists x\ x = a$ cümlesi doğrudur. Bir küme varsa, bu kümeye a denilebilir, ve sonuç olarak $\exists x\ x = a$ cümlesi doğru oluyor. Bu ana kadar hiç kesin bir kümemiz olmadı. Ama kümeler olmalı, ve birini zaten biliyoruz:

AKSİYOM 2 (Boş Küme). *$\varnothing$ boş sınıf, bir kümedir:*

$$\exists x\ \forall y\ (y \notin x)$$

cümlesi doğrudur.

Bu aksiyom sayesinde $\varnothing$ işareti, bir küme terimidir. Bu yüzden $\{\varnothing\}$ ve $\{\varnothing, a\}$ gibi sınıf terimlerini yazabiliriz. Bu terimler, küme terimi olacak. Boş küme gibi bilinen kümelerden yeni kümeler oluşturulabilir:

AKSİYOM 3 (Bitiştirme). *Tüm a ile b kümeleri için $a \cup \{b\}$ sınıfı, bir kümedir:*

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall w\ (w \in z \Leftrightarrow w \in x \lor w = y)$$

cümlesi doğrudur.

Teorem 12 (Temel Kümeler). *Tüm a ile b kümeleri için $\{a\}$ ile $\{a, b\}$ sınıfları, kümedir:*

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow z = x),$$
$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ \forall w\ (w \in z \Leftrightarrow w = x \lor w = y)$$

cümleleri doğrudur.

Kanıt. Boş Küme ile Bitiştirme Aksiyomlarına göre $\{a\}$ sınıfı, $\varnothing \cup \{a\}$ kümesine eşittir, ve $\{a, b\}$ sınıfı, $\{a\} \cup \{b\}$ kümesine eşittir. □

Özel olarak her a kümesi için $a \cup \{a\}$ bir kümedir. Bu son küme, a' olsun. Yani her a kümesi için

$$a' = a \cup \{a\}$$

olsun. a' kümesi, a kümesinin **ardılıdır** (*successor*). Sık sık ardılları alarak $\varnothing$, $\varnothing'$, $\varnothing''$, $\varnothing'''$, ..., küme dizisini oluşturabiliriz. Bu dizi,

$$\varnothing, \qquad \{\varnothing\}, \qquad \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \qquad \Big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\Big\}, \qquad \dots$$

olur. Yukarıdaki 5 numaralı sayfadaki gibi bu kümeler,

$$0, \qquad 1, \qquad 2, \qquad 3, \qquad \dots$$

doğal sayıları olacak. Elemanları *tüm* doğal sayılar olan bir sınıf var mıdır?

Doğal sayıların *topluluğunun* iki özelliği vardır:

1. 0, bu topluluktadır.
2. Eğer a, bu topluluktaysa, $a \cup \{a\}$ kümesi de, bu topluluktadır.

Bu özellikleri olan *kümeler,* bir sınıf oluşturur. Yani

$$\mathbf{\Omega} = \{x\colon 0 \in x \land \forall y\ (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)\}$$

eşitliğini sağlayan bir $\mathbf{\Omega}$ sınıfı vardır.

Teorem 13. *1.* $0 \in \bigcap \mathbf{\Omega}$.
2. Eğer $a \in \bigcap \mathbf{\Omega}$ *ise, o zaman* $a \cup \{a\} \in \bigcap \mathbf{\Omega}$ *olur.*
3. Eğer $a \subseteq \bigcap \mathbf{\Omega}$ *ise, ve* a*,*

$$0 \in a, \qquad \forall x\ (x \in a \Rightarrow x \cup \{x\} \in a)$$

özelliklerini sağlarsa, o zaman $a = \bigcap \mathbf{\Omega}$ *olur.*

Kanıt. 1. Eğer $a \in \mathbf{\Omega}$ ise, o zaman $0 \in a$. Sonuç olarak $0 \in \bigcap \mathbf{\Omega}$.

2. $a \in \bigcap \mathbf{\Omega}$ olsun. O zaman $\mathbf{\Omega}$ sınıfının her b elemanı için $a \in b$. Ayrıca $b \in \mathbf{\Omega}$ yüzünden $\forall y\ (y \in b \Rightarrow y \cup \{y\} \in b)$ cümlesi doğrudur. O zaman $a \cup \{a\} \in b$ olmalı. Sonuç olarak $a \cup \{a\} \in \bigcap \mathbf{\Omega}$.

3. $0 \in a$ ve $\forall x\ (x \in a \Rightarrow x \cup \{x\} \in a)$ doğru olsun. O zaman $a \in \mathbf{\Omega}$. Bu yüzden 11 numaralı teoreme göre $\bigcap \mathbf{\Omega} \subseteq a$ olmalı. Eğer ayrıca $a \subseteq \bigcap \mathbf{\Omega}$ ise, o zaman 7 numaralı teoreme göre $a = \bigcap \mathbf{\Omega}$. □

Bu teoreme rağmen eğer

$$\boldsymbol{A} \subseteq \bigcap \mathbf{\Omega}, \qquad 0 \in \boldsymbol{A}, \qquad \forall x\ (x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow x \cup \{x\} \in \boldsymbol{A}) \qquad (*)$$

ise $\boldsymbol{A} = \bigcap \mathbf{\Omega}$ cümlesini sonuçlandıramıyoruz. Neden? Tanımımıza göre*

$$\bigcap 0 = \mathbf{V}$$

(yani $\bigcap \varnothing = \mathbf{V}$) olur, ve $\mathbf{\Omega}$ sınıfının boş olmadığını şimdilik bilmiyoruz. Bu durumu hemen değiştirebiliriz:

AKSİYOM 4 (Sonsuzluk)**.** $\mathbf{\Omega} \neq 0$, *yani*

$$\exists x\ \big(0 \in x \land \forall y\ (y \in x \Rightarrow y \cup \{y\} \in x)\big)$$

cümlesi doğrudur.

Hâlâ yukarıdaki $(*)$ satırındaki varsayılarından $\boldsymbol{A} = \bigcap \mathbf{\Omega}$ cümlesini sonuçlandıramıyoruz. Neden? Bir tane aksiyomu daha kullanarak bunu sonuçlandırabiliriz:

AKSİYOM 5 (Ayırma)**.** *Bir kümenin her altsınıfı, bir kümedir, yani her $\varphi(x)$ formülü için*

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \big(z \in y \Leftrightarrow z \in x \land \varphi(z)\big)$$

cümlesi doğrudur.

---

*Bazı kitaplarda $\boldsymbol{A}$ boş ise $\bigcap \boldsymbol{A}$ kesişimi tanımlanmaz. Örneğin [8, s. 51 & 285] kaynağına bakınız.

Şimdi her a kümesi ve $\varphi(x)$ formülü için $\{x\colon x \in a \wedge \varphi(x)\}$ sınıfı, bir kümedir, ve bu küme

$$\{x \in a\colon \varphi(x)\}$$

olarak yazılır.

Teorem 14. *Bir sınıf boş değilse, kesişimi bir kümedir.*

Kanıt. $a \in \boldsymbol{B}$ olsun. 11 numaralı teoreme göre $\bigcap \boldsymbol{B} \subseteq a$. Ayırma Aksiyomuna göre $\bigcap \boldsymbol{B}$ kesişimi, bir küme olmalı. □

Özel olarak

$$\omega = \bigcap \boldsymbol{\Omega}$$

eşitliğini sağlayan bir ω kümesi vardır. Bu kümenin elemanları, **von Neumann doğal sayılarıdır.** ω işareti, yeni bir küme terimidir. Bundan sonra $\boldsymbol{\Omega}$ sınıf terimini kullanmayacağız.

Şimdi 13 numaralı teoremi aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

1. $0 \in \omega$.
2. Eğer $a \in \omega$ ise, o zaman $a' \in \omega$ olur.
3. Eğer $a \subseteq \omega$ ise, ve a,

$$0 \in a, \qquad\qquad \forall x\ (x \in a \Rightarrow x' \in a)$$

   özelliklerini sağlarsa, o zaman $a = \omega$ olur.

Ayrıca her kümeninki gibi ω kümesinin de her altsınıfı, bir kümedir. Sonuç olarak ω kümesinin bazı özelliklerini **tümevarım** (*induction*) yöntemiyle kanıtlayabileceğiz.

Aslında bazen ω kümesinin iki özelliğininin daha kullanılması gerekecek. $\forall x\ x' \neq 0$ apaçıktır. Ama k ile m, doğal sayılar ise, ve $k' = m'$ ise, $k = m$ eşitliğini elde etmek, biraz daha zor olacak.

Mümkünse $k' = m'$ ama $k \neq m$ olsun. O zaman $k \in m$ ve $m \in k$ olmalı. Bundan $k \in k$ cümlesini sonuçlandırmak istiyoruz.

Eğer bir $\boldsymbol{A}$ sınıfı,

$$\forall x\ \forall y\ (x \in \boldsymbol{A} \wedge y \in x \Rightarrow y \in \boldsymbol{A})$$

cümlesini sağlarsa, o zaman $\boldsymbol{A}$ sınıfına **geçişli** (*transitive*) denir. Öyleyse her geçişli sınıfın her elemanı, sınıfın bir altkümesidir de.

Teorem 15. *ω kümesinin her elemanı, geçişlidir.*

Kanıt. a, ω kümesinin geçişli elemanları kümesi olsun. Yani

$$\begin{aligned} a &= \{x \in \omega\colon \forall y\ \forall z\ (y \in x \land z \in y \Rightarrow z \in x)\} \\ &= \{x \in \omega\colon \forall y\ (y \in x \Rightarrow y \subseteq x)\} \end{aligned}$$

olsun. O zaman $0 \in a$ olur. *Tümevarım hipotezi* olarak $b \in a$ olsun. $b' \in a$ cümlesinin doğruluğunu göstereceğiz. $c \in b'$ olsun. Ya $c \in b$ ya da $c = b$ olur. Eğer $c \in b$ ise, o zaman hipotezimize göre $c \subseteq b$ olur. Her durumda $b \subseteq b'$. Öyleyse $c \subseteq b'$. Ama c, b' kümesinin herhangi bir elemanıdır. Sonuç olarak $b' \in a$ olur. Tümevarımdan (yani 13 numaralı teoremin 32 numaralı sayfadaki biçiminden) $a = \omega$ olur. □

Teorem 16. *ω kümesinin hiçbir elemanı, kendisini içermez.*

Kanıt. Tekrar tümevarımı kullanacağız. Çünkü boş kümenin hiçbir elemanı yok, $0 \notin 0$ olur. Şimdi $a \in \omega$ ve $a \notin a$ olsun. Eğer $a' \in a'$ ise, ya $a' \in a$ ya da $a' = a$ olur. Her durumda, geçen teoreme göre, $a' \subseteq a$ olur, dolayısıyla $a \in a$ olur (çünkü $a \in a'$). Bu sonuç, varsayımımızla çelişir. O zaman $a' \notin a'$ olmalı. Tümevarımdan kanıtımız bitti. □

Teorem 17. *ω kümesinin tüm k ile m elemanları için $k' = m'$ ise $k = m$ olur.*

Kanıt. Mümkünse $k' = m'$ ama $k \neq m$ olsun. Dediğimiz gibi $k \in m$ ve $m \in k$ olmalı. 15 ile 16 numaralı teoremlere göre $k \in k$ ve $k \notin k$ olur, bir çelişkidir. □

Şimdi ω kümesinin üç tane özelliği vardır:

1. $\forall x\ (x \in \omega \Rightarrow x' \neq 0)$.
2. $\forall x\ \forall y\ (x \in \omega \land y \in \omega \land x' = y' \Rightarrow x = y)$.
3. $\forall x\ \big(x \subseteq \omega \land 0 \in x \land \forall y\ (y \in x \Rightarrow y' \in x) \Rightarrow x = \omega\big)$.

Bu özelliklerden doğal sayıların tüm özellikleri elde edilebilir. Mesela *iyisıralama* özelliği elde edilebilir. Aslında ω, içerilme ($\in$) bağıntısı tarafından iyi sıralanır. Ama bir bağıntı nedir?

3.2 Bağıntılar

Herhangi a ile b kümeleri için $\big\{\{a\},\{a,b\}\big\}$ kümesi (a,b) **sıralı ikilisi** (*ordered pair*) olarak yazılır. Yani

$$(a,b)=\big\{\{a\},\{a,b\}\big\}$$

olur.

Teorem 18. *Tüm a, b, c, ve d kümeleri için*

$$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c\wedge b=d$$

cümlesi doğrudur.

Alıştırma 8. Teoremi kanıtlayınız.

Şimdi her ikili $\varphi(x,y)$ formülü için

$$\big\{z\colon \exists x\ \exists y\ \big(z=(x,y)\wedge\varphi(x,y)\big)\big\}$$

sınıfı,

$$\{(x,y)\colon \varphi(x,y)\}$$

olarak yazılabilir. Öyle bir sınıf, bir **ikili bağıntıdır** (*binary relation*).

Örneğin:

1. İçerilme bağıntısı, $\{(x,y)\colon x\in y\}$ sınıfıdır.
2. Eşitlik bağıntısı, $\{(x,y)\colon x=y\}$ sınıfıdır.

Aynı şekilde, eğer $\boldsymbol{R}$, bir ikili bağıntıysa, o zaman $(x,y)\in\boldsymbol{R}$ formülünün kısaltması olarak $x\ \boldsymbol{R}\ y$ ifadesini yazarız, yani

$$x\ \boldsymbol{R}\ y \text{ denktir } (x,y)\in\boldsymbol{R}.$$

$\boldsymbol{R}$ bağıntısının **ters bağıntısı** veya **tersi** (*converse*),

$$\{(y,x)\colon x\ \boldsymbol{R}\ y\}$$

bağıntısıdır. Bu bağıntı, $\breve{\boldsymbol{R}}$ olarak yazılır; yani

$$x\ \breve{\boldsymbol{R}}\ y \text{ denktir } y\ \boldsymbol{R}\ x.$$

$\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$, iki sınıf ise, o zaman tanıma göre

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(x, y) \colon x \in \boldsymbol{A} \wedge y \in \boldsymbol{B}\}$$

olur; bu bağıntı, $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıflarının **çarpımıdır** (*product*). Eğer $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, o zaman $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$ sınıfından $\boldsymbol{B}$ sınıfına giden bir bağıntıdır.

Sınıflar arasındaki bir bağıntının kendisi, bir sınıftır. Sıralı ikililerin tanımı, sınıflarla bağıntıları birleştirir. Benzer şekilde Newton'un Ağırlık Kanunu, Ay'ın Yerin etrafında dönüşü ile nesnelerin yere düşüşünü birleştirir.

Eğer $\boldsymbol{F}$,

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x\ \boldsymbol{F}\ y \wedge x\ \boldsymbol{F}\ z \Rightarrow y = z) \tag{†}$$

cümlesini sağlayan bir ikili bağıntıysa, o zaman

(1) $\boldsymbol{F}$ bağıntısına **gönderme** denir;
(2) $\{x \colon \exists y\ x\ \boldsymbol{F}\ y\}$ sınıfına $\boldsymbol{F}$ göndermesinin **tanım sınıfı** (*domain*) denir;
(3) $\{y \colon \exists x\ x\ \boldsymbol{F}\ y\}$ sınıfına $\boldsymbol{F}$ göndermesinin **değer sınıfı** (*range*) denir.[†]

Bu durumda $x\ \boldsymbol{F}\ y$ formülünün yerine

$$y = \boldsymbol{F}(x)$$

ifadesini yazarız, çünkü $a\ \boldsymbol{F}\ b$ doğruysa, o zaman b kümesi, a kümesi tarafından belirtilir. Buradaki $\boldsymbol{F}(x)$ ifadesi, yeni bir küme terimidir. O zaman $\boldsymbol{F}$,

$$x \mapsto \boldsymbol{F}(x)$$

olarak yazılabilir; yani

$$(x \mapsto \boldsymbol{F}(x)) = \{(x, y) \colon y = \boldsymbol{F}(x)\}.$$

Örneğin:

[†]Bu notlarda bir gönderme, sadece (†) cümlesini sağlayan bir $\boldsymbol{F}$ ikili bağıntısıdır. Fakat bazı kaynaklarda (örneğin [8, s. 70] kaynağında) bir gönderme veya fonksiyon, (1) (†) cümlesini sağlayan bir $\boldsymbol{F}$ ikili bağıntısı, (2) $\{y \colon \exists x\ x\ \boldsymbol{F}\ y\}$ sınıfına eşit bir $\boldsymbol{A}$ sınıfı, ve (3) $\{y \colon \exists x\ x\ \boldsymbol{F}\ y\}$ sınıfını *kapsayan* bir $\boldsymbol{B}$ sınıfı tarafından oluşturulmuş bir üçlüdür. O halde (aşağıdaki 36 numaralı sayfadaki gibi) $\boldsymbol{F} \colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ ifadesi yazılır. Ayrıca, $\boldsymbol{B}$ sınıfına *göndermenin değer sınıfı* (veya *varış sınıfı*) deneyebilir. İngilizcede *codomain* kullanılır. Neyse, buradakı $\boldsymbol{B}$ sınıfı, sadece $\boldsymbol{F}$ sınıfı tarafından belirtilmez, ve buna hiçbir ad vermiyoruz.

1. Her a kümesi için, $x \mapsto a$ **sabit gönderme** (*constant function*) vardır, özel olarak $x \mapsto 0$, $x \mapsto 1$, …, $x \mapsto \omega$, …

2. $x \mapsto x$, **özdeşlik göndermesidir** (*identity function*).

3. $x \mapsto x'$, **ardıl göndermesi** (*successor function*) veya **ardıllamadır** (*succession*).

Eğer $\boldsymbol{F}$ göndermesinin tanım sınıfı $\boldsymbol{A}$ ise, ve değer sınıfını, bir $\boldsymbol{B}$ sınıfı tarafından kapsanırsa, o zaman

$$\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$$

ifadesini yazarız. Yani bu ifade,

$$\begin{aligned}&\forall x\ \forall y\ (x\ \boldsymbol{F}\ y \Rightarrow x \in \boldsymbol{A} \land y \in \boldsymbol{B})\\ &\qquad \land \forall x\ \bigl(x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow \exists y\ (x\ \boldsymbol{F}\ y)\bigr)\\ &\qquad\qquad \land \forall x\ \forall y\ \forall z\ (x\ \boldsymbol{F}\ y \land x\ \boldsymbol{F}\ z \Rightarrow y = z)\end{aligned}$$

cümlesinin kısaltmasıdır.

3.3 Eşleniklik

Şimdi $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ olsun. Eğer $\boldsymbol{F}$ bağıntısının ters bağıntısı, $\boldsymbol{B}$ sınıfından $\boldsymbol{A}$ sınıfına giden bir göndermeyse, o zaman bu gönderme, $\boldsymbol{F}$ göndermesinin **ters göndermesi** veya **tersidir** (*inverse*), ve $\boldsymbol{F}$ göndermesi, $\boldsymbol{A}$ sınıfından $\boldsymbol{B}$ sınıfına giden bir **eşlemedir** (*bijection*), ve $\boldsymbol{A}$ ile $\boldsymbol{B}$ sınıflarının kendileri, **eşleniktir** (*equipollent*). Aslında bir sınıf, bir *kümeyle* eşlenikse, o zaman sınıf ve eşleme de kümedir. Fakat bunu göstermek için yeni bir aksiyom gerekecek.

AKSİYOM 6 (Yerleştirme)**.** *Eğer bir göndermenin tanım sınıfı bir kümeyse, o zaman değer sınıfı da bir kümedir. Yani her ikili $\varphi(x,y)$ formülü için*

$$\begin{aligned}&\forall x\ \forall y\ \forall z\ \bigl(\varphi(x,y) \land \varphi(x,z) \Rightarrow y = z\bigr)\\ &\qquad \land \exists z\ \forall x\ \bigl(x \in z \Leftrightarrow \exists y\ \varphi(x,y)\bigr)\\ &\qquad\qquad \Rightarrow \exists w\ \forall y\ \bigl(y \in w \Leftrightarrow \exists x\ \varphi(x,y)\bigr).\end{aligned}$$

Teorem 19. *Bir sınıf, bir kümeyle eşlenikse, sınıf da bir kümedir.*

Alıştırma 9. Teoremi kanıtlayınız.

Teorem 20. *Tanım sınıfı bir küme olan her gönderme bir kümedir.*

Alıştırma 10. Teoremi kanıtlayınız.

Alıştırma 11. $\boldsymbol{F}$ bir gönderme olsun.

(a) Ayırma Aksiyomunu kullanmadan her a kümesi için $\{y\colon \exists x\ (x \in a \wedge x\ \boldsymbol{F}\ y)\}$ sınıfının bir küme olduğunu kanıtlayınız.
(b) Bu sonucu kullanarak Yerleştirme ve Ayırma Aksiyomlarını kanıtlayınız.

Eğer $\boldsymbol{C}$, bir $\boldsymbol{F}$ göndermesinin tanım sınıfının altsınıfıysa

$$\{y\colon \exists x\ (x \in \boldsymbol{C} \wedge \boldsymbol{F}(x) = y\}$$

sınıfına $\boldsymbol{C}$ sınıfının $\boldsymbol{F}$ altında **görüntüsü** denir, ve bu görüntü

$$\{\boldsymbol{F}(x)\colon x \in \boldsymbol{C}\} \qquad \text{veya} \qquad \boldsymbol{F}[\boldsymbol{C}]$$

olarak yazılır.

Alıştırma 12. $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ olsun.

(a) Eğer $c \subseteq \boldsymbol{A}$ ise, $\boldsymbol{F}[c]$ sınıfının bir küme olduğunu kanıtlayınız.
(b) Eğer c herhangi bir kümeyse $\boldsymbol{F}[c \cap \boldsymbol{A}]$ görüntüsü bir küme olmalı mı?

19 ve 20 numaralı teoremler sayesinde kümelerin eşlenikliği, bir ikili bağıntıdır. Bu bağıntının işareti

$$\approx$$

olsun. (O zaman $=$ gibi $\approx$, yeni bir yüklemdir.) Aslında eşitlik gibi eşleniklik de, bir denklik bağıntısıdır (22 numaralı sayfaya bakınız):

Teorem 21. *Tüm a, b, ve c kümeleri için*

$$a \approx a, \qquad a \approx b \Rightarrow b \approx a, \qquad a \approx b \wedge b \approx c \Rightarrow a \approx c$$

cümleleri doğrudur.

Alıştırma 13. Teoremi kanıtlayınız.

Birkaç tane von Neumann doğal sayısının tanımını, 5 numaralı sayfadan hatırlayalım:

$$0 = \varnothing, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad 3 = \{0, 1, 2\}, \quad 4 = \{0, 1, 2, 3\}.$$

Bir a kümesinin

1) hiçbir elemanı yoksa, o zaman $a \approx 0$; aslında $a = 0$;
2) tek bir elemanı varsa, o zaman $a \approx 1$;
3) iki (ve sadece iki) elemanı varsa, o zaman $a \approx 2$;
4) üç (ve sadece üç) elemanı varsa, o zaman $a \approx 3$.

Ayrıca

$$0 \not\approx 1, \qquad 0 \not\approx 2, \qquad 0 \not\approx 3, \qquad 1 \not\approx 2, \qquad 1 \not\approx 3, \qquad 2 \not\approx 3.$$

Ancak herhangi iki eşlenik doğal sayı eşit olmalı mı?

Teorem 22. *Her doğal sayı, ya* 0 *ya bir doğal sayının ardıldır.*

Alıştırma 14. Teoremi kanıtlayınız.

Teorem 23. $\forall x\, \forall y\, (x \in \omega \land y \in \omega \land x \neq y \Rightarrow x \not\approx y)$.

Kanıt. Tümevarımla her n doğal sayısı için

$$\forall x\, (x \in \omega \land x \neq n \Rightarrow x \not\approx n)$$

cümlesini kanıtlayacağız. $n = 0$ ise doğrudur. $n = m$ ise doğru olsun, ve bir ℓ doğal sayısı için $m' \approx \ell$ olsun. O zaman ℓ boş değil. Son teoreme göre ℓ bir halef olmalı. $\ell = k'$ olsun. m' sayısından k' sayısına giden bir f eşlemesi vardır. Eğer $f(m) = k$, o zaman $f \smallsetminus \{(m, k)\}$, m sayısından k sayısına giden bir eşlemedir. Eğer $f(m) \neq k$, o zaman

$$\big\{(x, y) \colon x \in m \smallsetminus \{\breve{f}(k)\} \land y = f(x)\big\} \cup \big\{(\breve{f}(k), f(m))\big\}$$

bağıntısı, m sayısından k sayısına giden bir eşlemedir. Öyleyse her durumda $m \approx k$ olur. Hipotezimize göre $m = k$ olmalı, dolayısıyla $m' = \ell$ olur. Kanıt bitti. $\square$

3.4 Büyüklük

Şimdi $\boldsymbol{F}$, tanım kümesi $\boldsymbol{A}$ olan bir gönderme olsun. Eğer

$$\forall x\ \forall y\ (x \in \boldsymbol{A} \land y \in \boldsymbol{A} \land \boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{F}(y) \Rightarrow x = y)$$

ise, o zaman $\boldsymbol{F}$ bir **birebir** (*one-to-one*) veya **injektif** (*injective*) göndermedir. O halde

$$\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \rightarrowtail \boldsymbol{B}$$

ifadesini yazarız. Eğer bir a kümesinden bir b kümesine giden bir injektif gönderme varsa

$$a \preccurlyeq b$$

ifadesini yazarız. Öyleyse $\preccurlyeq$, bir bağıntıdır.

Teorem 24. *Tüm a, b, ve c kümeleri için*

$$a \preccurlyeq a, \qquad a \preccurlyeq b \land b \preccurlyeq c \Rightarrow a \preccurlyeq c$$

cümleleri doğrudur.

Alıştırma 15. Teoremi kanıtlayınız.

Bir tane bağıntı daha vardır:

$$a \prec b \text{ denktir } a \preccurlyeq b \land a \not\approx b.$$

O zaman son teoremin özel durumu vardır:

$$a \prec b \land b \prec c \Rightarrow a \preccurlyeq c.$$

Ama $a \prec b \land b \prec c$ ise $a \prec c$ sonuçlanabilir mi?

Eğer $\boldsymbol{R}$ ve $\boldsymbol{S}$, iki bağıntıysa, o zaman tanıma göre

$$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{S} = \{(x, z)\colon \exists y\ (x\ \boldsymbol{R}\ y \land y\ \boldsymbol{S}\ z)\}$$

olur.

Teorem 25. *Eğer $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ ve $\boldsymbol{G}\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ ise, o zaman*

$$\boldsymbol{F}/\boldsymbol{G}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}, \qquad \forall x\ \big(x \in \boldsymbol{A} \Rightarrow (\boldsymbol{F}/\boldsymbol{G})(x) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{F}(x))\big)$$

olur.

Alıştırma 16. Teoremi kanıtlayınız.

Teorem 26 (Schröder–Bernstein). *Tüm a ve b kümeleri için*

$$a \preccurlyeq b \land b \preccurlyeq a \Rightarrow a \approx b.$$

Kanıt (Zermelo [18]). $f\colon a \rightarrowtail b$ ve $g\colon b \rightarrowtail a$ olsun. Bu durumda

$$(f/g)[a] \subseteq g[b] \subseteq a, \qquad\qquad g[b] \approx b$$

olur. Biz $a \approx g[b]$ eşlenikliğini kanıtlayacağız. Sonuç olarak $c \approx b$ olacak.

a kümesinden $g[b]$ kümesine giden bir h eşlemesini tanımlayabilirsek, herhalde a kümesinin bir c altkümesi için

$$h = \{(x, x)\colon x \in c\} \cup \{(x, (f/g)(x))\colon x \in a \smallsetminus c\} \tag{‡}$$

olacak. O halde, çünkü $h[a] = g[b]$ olacak,

$$c \cup (f/g)[a \smallsetminus c] = g[b] \tag{§}$$

olmalı. Çünkü h birebir olacak,

$$c \cap (f/g)[a \smallsetminus c] = \varnothing \tag{¶}$$

olmalı. O zaman

$$c = g[b] \smallsetminus (f/g)[a \smallsetminus c]$$

olur. Çünkü f/g birebirdir,

$$(f/g)[a \smallsetminus c] = (f/g)[a] \smallsetminus (f/g)[c],$$

dolayısıyla

$$c = g[b] \smallsetminus \big((f/g)[a] \smallsetminus (f/g)[c]\big)$$

olur. Çünkü $(f/g)[c] \subseteq (f/g)[a] \subseteq g[b]$,

$$c = \big(g[b] \smallsetminus (f/g)[a]\big) \cup (f/g)[c] \tag{‖}$$

olur. Ters olarak, eğer c, (‖) satırındaki gibiyse, o zaman (§) ile (¶) satırları doğrudur, ve sonuç olarak, çünkü f/g birebirdir, (‡) satırındaki gibi h göndermesi, a kümesinden $g[b]$ kümesine giden bir eşlemedir.

Şimdi öyle bir c kümesini bulmalıyız. O zaman

$$\boldsymbol{A} = \big\{x\colon \big(g[b] \smallsetminus (f/g)[a]\big) \cup (f/g)[x] \subseteq x \subseteq a\big\}$$

olsun. Bu durumda $a \in \boldsymbol{A}$, dolayısıyla $\bigcap \boldsymbol{A}$ bir küme olmalı. Bu küme c olsun. O zaman (‖) satırı doğrudur. Nitekim $c \in \boldsymbol{A}$ olmalı (neden?). Eğer (‖) satırı yanlış ise, o zaman

$$d \in c \smallsetminus \Big(\big(g[b] \smallsetminus (f/g)[a]\big) \cup (f/g)[c]\Big)$$

cümlesini sağlayan bir d vardır. Bu durumda

$$c \smallsetminus \{d\} \in \boldsymbol{A}, \qquad \bigcap \boldsymbol{A} \subseteq c \smallsetminus \{d\}, \qquad c \subseteq c \smallsetminus \{d\}, \qquad d \notin c$$

olur. Bu bir çelişkidir. O zaman (‖) satırı doğru olmalı, ve $a \approx g[b]$, dolayısıyla $a \approx b$. □

AKSİYOM 7 (Kuvvet Kümesi)**.** *Her kümenin kuvvet sınıfı, bir kümedir, yani*

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \big(z \in y \Leftrightarrow \forall w\ (w \in z \Rightarrow w \in x)\big)$$

cümlesi doğrudur.

Teorem 27 (Cantor)**.** *Her a kümesi için*

$$a \prec \mathscr{P}(a).$$

Kanıt. $\big\{\big(x, \{x\}\big) \colon x \in a\big\}$ bağıntısının sayesinde $a \preccurlyeq \mathscr{P}(a)$ olur. Şimdi $f\colon a \rightarrowtail \mathscr{P}(a)$ olsun ve

$$b = \{x\colon x \in a \land x \notin f(x)\}$$

olsun. O zaman a kümesinin her c elemanı için

$$c \in b \Leftrightarrow c \notin f(c).$$

Öyleyse $b \neq f(c)$. Dolayısıyla $b \notin f[a]$, ve f, eşleme değildir. O zaman $a \not\approx \mathscr{P}(a)$. □

$\mathbf{V}$ evrensel sınıfını hatırlayın:

$$\mathbf{V} = \{x : x = x\}$$

olur. Eğer $\boldsymbol{F}$ bir göndermeyse ve $\boldsymbol{A}$ tanım kümesiyse o zaman

$$\boldsymbol{F} : \boldsymbol{A} \to \mathbf{V}$$

olur. O halde her $\boldsymbol{B}$ sınıfı için

$$\{x : x \in \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{F}(x) \in \boldsymbol{B}\}$$

sınıfına $\boldsymbol{B}$ sınıfının $\boldsymbol{F}$ altında **öngörüntüsü** (*pre-image*) denir, ve bu öngörüntü

$$\boldsymbol{F}^{-1}[\boldsymbol{B}]$$

olarak yazılır.

Alıştırma 17. Bir kümenin bir gönderme altında öngörüntüsü bir küme olmalı mı?

3.5 Sıralamalar

Sıralama (*ordering*),

$$\forall x \neg x \, \boldsymbol{R} \, x, \qquad \forall x \, \forall y \, \forall z \, (x \, \boldsymbol{R} \, y \wedge y \, \boldsymbol{R} \, z \Rightarrow x \, \boldsymbol{R} \, z)$$

cümlelerini sağlayan bir $\boldsymbol{R}$ ikili bağıntısıdır. Örneğin Schröder–Bernstein Teoremine göre $\prec$ bağıntısı, bir sıralamadır. Ayrıca

$$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B} \text{ denktir } \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$$

olsun; o zaman $\subset$ bağıntısı da, bir sıralamadır.

Belki bir $\boldsymbol{R}$ bağıntısı, bir sıralama değildir, ama bir $\boldsymbol{A}$ sınıfı için

$$\boldsymbol{R} \cap (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A})$$

kesişimi, bir sıralama olabilir. O zaman $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{R}$ tarafından sıralanır. Örneğin $\in$, sıralama değil; ama 15 ile 16 numaralı teoremlere göre $\in$ bağıntısı ω kümesini sıralar.

Eğer $\boldsymbol{A}$ sınıfı, $\boldsymbol{R}$ tarafından sıralanırsa, ve üstelik

$$\forall x\ \forall y\ (x \in \boldsymbol{A} \wedge y \in \boldsymbol{A} \wedge x \neq y \Rightarrow x\ \boldsymbol{R}\ y \vee y\ \boldsymbol{R}\ x)$$

doğruysa, o zaman $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$ sınıfının bir **doğrusal** (*linear*) sıralamasıdır.

Teorem 28. *$\in$ bağıntısı, her doğal sayının doğrusal sıralamasıdır.*

Alıştırma 18. Teoremi kanıtlayınız.

Eğer $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$ sınıfının doğrusal sıralamasıysa, ve üstelik $\boldsymbol{A}$ sınıfının her boş olmayan b altkümesinin $\boldsymbol{R}$ sıralamasına göre **en küçük** (*least*) elemanı varsa, yani

$$\forall x\ \Big(x \subseteq \boldsymbol{A} \wedge x \neq 0 \Rightarrow \exists y\ \big(y \in x \wedge \forall z\ (z \in x \smallsetminus \{y\} \Rightarrow y\ \boldsymbol{R}\ z)\big)\Big)$$

doğruysa, o zaman $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{R}$ tarafından **iyi sıralanır** (*well-ordered*).

Teorem 29. *$\in$ bağıntısı, her doğal sayının iyi sıralamasıdır.*

Alıştırma 19. Teoremi kanıtlayınız.

Teorem 30. *ω kümesinde $\in$ ile $\subset$, aynı bağıntıdır, yani*

$$\forall x\ \forall y\ \big(x \in \omega \wedge y \in \omega \Rightarrow (x \in y \Leftrightarrow x \subset y)\big)$$

doğrudur.

Kanıt. k ile m, doğal sayılar olsun. 15 ile 16 numaralı teoremlere göre $k \in m$ ise $k \subset m$ olur.

Şimdi $k \subset m$ olsun. Önceki teoreme göre $m \smallsetminus k$ farkının en küçük ℓ elemanı vardır. O zaman $\ell \in m$, dolayısıyla $\ell \subseteq m$. Ayrıca $a \in \ell$ ise $a \in k$ olmalı (çünkü $a \in m$, ama içerilmeye göre ℓ, $m \smallsetminus k$ farkının en küçük elemanıdır). Öyleyse $\ell \subseteq k$ olur. Ama $b \in k$ ise $b \in m$, dolayısıyla $\ell \in b$ veya $\ell = b$ veya $b \in \ell$ olur. Ancak $\ell \notin b$ ve $\ell \neq b$ (çünkü $b \subseteq k$ ve $\ell \notin k$). Öyleyse $b \in \ell$. Sonuç olarak $k \subseteq \ell$. Fakat $\ell \subseteq k$. O zaman $k = \ell$, dolayısıyla $k \in m$. $\square$

Teorem 31. *ω, içerilme tarafından iyi sıralanır.*

Kanıt. ω kümesinde $m \notin k$ ve $m \neq k$ olsun. Yani (önceki teoremi kullanarak) $m \not\subseteq k$ olsun. O zaman $m \smallsetminus k$ farkının en küçük ℓ elemanı vardır. Geçen kanıttaki gibi $\ell \subseteq k$, yani $\ell \in k$ veya $\ell = k$. Fakat $\ell \notin k$. Sonuç olarak $\ell = k$, dolayısıyla $k \in m$. Öyleyse içerilme, ω kümesinin bir doğrusal sıralamasıdır.

Ayrıca $a \subseteq \omega$ ve $n \in a$ ise, ya n a kümesinin en küçük elemanıdır, ya da $n \cap a$ kesişimi boş değildir. Son durumda bu kesişimin en küçük elemanı vardır, ve bu eleman, a kümesinin en küçük elemanıdır. □

Kaynakça

[1] George Boolos. Iteration again (1989). In *Logic, Logic, and Logic*, pages 88–104. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1998. With introductions and an afterword by John P. Burgess, With a preface by Burgess and Richard Jeffrey, Edited by Jeffrey.

[2] Georg Cantor. Letter to Dedekind (1899). In van Heijenoort [15], pages 113–7.

[3] Descartes. *The Geometry of René Descartes*. Dover Publications, Inc., New York, 1954. Translated from the French and Latin by David Eugene Smith and Marcia L. Latham, with a facsimile of the first edition of 1637.

[4] Kurt Gödel. On formally undecidable propositions of *principia mathematica* and related systems I (1931). In van Heijenoort [15], pages 596–616.

[5] Casimir Kuratowski. Sur la notion d'ordre dans la théorie des ensembles. *Fundamenta Mathematicae*, pages 161–71, 1921.

[6] Azriel Levy. *Basic set theory*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2002. Reprint of the 1979 original [Springer, Berlin].

[7] Geoffrey Lewis. *Turkish Grammar*. Oxford University Press, second edition, 2000. First edition 1967.

[8] Ali Nesin. *Sezgisel Kümeler Kuramı*, volume 6 of *Nesin Matematik Köyü Kitaplığı*. Nesin Yayıncılık, İstanbul, 2010.

[9] Giuseppe Peano. The principles of arithmetic, presented by a new method (1889). In van Heijenoort [15], pages 83–97.

[10] Atilla Özkırımlı. *Türk Dili, Dil ve Anlatım: Yaşayan Türkçe Üzerine Bir Deneme*. İstanbul Bilgi Üniversitesi Yayınları, 2001.

[11] Thoralf Skolem. Some remarks on axiomatized set theory (1922). In van Heijenoort [15], pages 290–301.

[12] Alfred Tarski. The concept of truth in formalized languages (1933). In *Logic, semantics, metamathematics* [13], pages 152–278. Papers from 1923 to 1938, Translated by J. H. Woodger, Edited and with an introduction by John Corcoran.

[13] Alfred Tarski. *Logic, semantics, metamathematics.* Hackett Publishing Co., Indianapolis, IN, second edition, 1983. Papers from 1923 to 1938, Translated by J. H. Woodger, Edited and with an introduction by John Corcoran.

[14] Alfred Tarski and Steven Givant. *A formalization of set theory without variables*, volume 41 of *American Mathematical Society Colloquium Publications.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1987.

[15] Jean van Heijenoort, editor. *From Frege to Gödel: A source book in mathematical logic, 1879–1931.* Harvard University Press, Cambridge, MA, 2002.

[16] John von Neumann. On the introduction of transfinite numbers (1923). In van Heijenoort [15], pages 346–354.

[17] Norbert Wiener. A simplification of the logic of relations (1914). In van Heijenoort [15], pages 224–7.

[18] Ernst Zermelo. Investigations in the foundations of set theory I (1908a). In van Heijenoort [15], pages 199–215.

Dizin