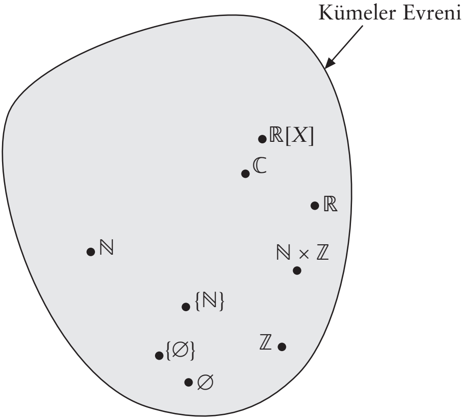
9. Ordinallerin İşlevi

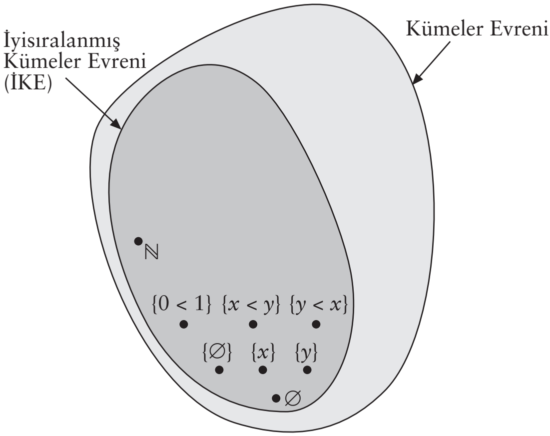
Kümeler topluluğunun bir küme olamayacağını Bertrand Russell Paradoksu'ndan biliyoruz [SKK]. Küme olmayan bir şeye küme diyemeyeceğimize göre, tüm kümeler topluluğuna bir başka ad bulmalıyız. Bu topluluğa ***kümeler evreni*** ya da kısaca ***evren*** diyelim.



Muazzam bir şey olan evreni yukarda resmettik. (Zaten küme olmamasının nedeni de bu muazzamlığı! Küme olmak için çok büyük. O kadar büyük küme mi olurmuş!) İçine de bildiğimiz birkaç küme yerleştirdik.

İyi sıralanmış her küme (sıralamasıyla birlikte) bu evrenin içinde yer alıyor. Çünkü ne de olsa, iyi sıralanmış bir küme, bazı özellikleri sağlayan bir $A \subseteq X \times X$ altkümesi için (X, A) biçiminde yazılan bir çifttir ve [Sİ]'den de bildiğimiz üzere her çift bir kümedir.

İyisıralanmış kümelerin topluluğu da küme olamaz, çünkü tek elemanlı her küme iyisıralı bir küme olduğundan, eğer iyisıralanmış kümeler topluluğu bir küme olsaydı, Tanımlanabilir Altküme Aksiyomu'na göre, tek elemanlı kümeler topluluğu da bir küme olurdu, ama o zaman da bu kümenin bileşimi de, ki bu tüm kümeler evrenidir, Bileşim Aksiyomu'na göre bir küme olurdu.



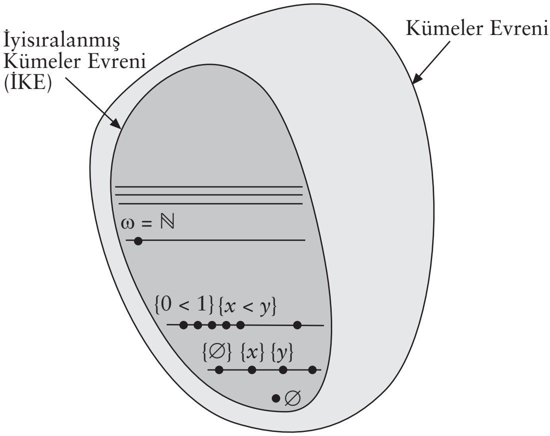
İyisıralanmış kümeler topluluğuna ***iyisıralanmış kümeler evreni*** (İKE) diyelim. Bunu yukarda resmettik.

Bütün iyisıralanmış kümeleri koyu gri renkteki İKE'nin içine koymalıyız. Dolayısıyla tüm tek elemanlı kümeler, bedavadan iyisıralanmış olduklarından, İKE'nin içinde olmalılar. Ayrıca birbirinden farklı her x ve y kümesi için, $\{x, y\}$ kümesinden İKE'nin içinde iki tane olmalı, biri $x < y$ iyisıralaması için, diğeri de $y < x$ iyisıralaması için. Bu iki iyisıralanmış kümeyi resimde $\{x < y\}$ ve $\{y < x\}$ olarak gösterdik.

Genel olarak, $x_0, ..., x_{n-1}$ birbirinden farklıysa, $\{x_0, ..., x_{n-1}\}$ kümesi $n!$ değişik biçimde tam (ya da iyi, farketmez) sıralandığından, bu küme İKE'nin içinde tam $n!$ değişik biçimde yer alır.

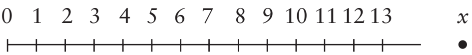
Tahmin edildiğini sandığım üzere, aslında İKE'ye kümeleri değil, kümelerle birlikte kümelerin elemanlarının iyisıralanmış hallerini koyuyoruz. Yani İKE topluluğunda X kümeleri değil, $(X, <)$ iyisıralamaları var, ama biz kolaylık olsun diye, sıralamayı kümenin bir parçasıymış gibi addedip $(X, <)$ yerine yanlış da olsa X yazacağız.

İyisıralanmış kümeleri İKE'nin içine yerleştirirken, küçükleri aşağıya büyükleri yukarıya yazalım, yani eğer iyisıralanmış bir Y kümesi sıralaması bozulmadan X'in içine gömülüyorsa, yani Y'den X'e giden bir eşyapı fonksiyonu varsa, (ve yine) yani Bölüm 8.2'deki yazılımla $Y \preccurlyeq X$ ise, o zaman Y'yi görsel olarak X'in altına yazalım. Eğer $Y \preccurlyeq X$ ve $X \preccurlyeq Y$ ise, yani $X \approx Y$ ise (Bölüm 8.2. Özellik E6), X ve Y'yi aynı satıra yazalım. Örneğin, tüm tek elemanlı kümeler aynı satıra yazılsın.



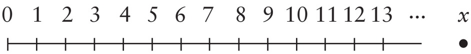
Böylece iyisıralanmış kümeleri kat kat sıralarız. İyisıralanmış küme ne kadar büyükse o kadar yukarı yazılır. Eşyapısal olanları da aynı kata yerleştirdik.

Zemin katta $\varnothing$ var elbette, boşküme zemin katta tek başına oturuyor. Bunun bir üstündeki birinci kat oldukça kalabalık, birinci katta bir elemanlı tüm kümeler var. Bir sonraki katta iki elemanlı kümeler var ama bu kümelerin her biri iki kez yer alıyor. n-inci katta n tane elemanı olan kümeler var, her biri $n!$ kez yer alıyor. Sonlu kümeler bittiğinde karşımıza $\mathbb{N}$ (doğal sıralamayla) ve $\mathbb{N}$'ye eşyapısal olan iyisıralamalar çıkıyor. Doğal olarak sıralanmış $\mathbb{N}$ kümesini, ω olarak göstermenin bir gelenek olduğunu ve bu geleneğe uyacağımızı söylemiştik.



ω iyisıralaması

ω'nın oturduğu katın bir üst katında ω'nın en sonuna tek bir eleman getirilerek oluşan iyisıralamalar oturuyor. ω'da olmayan herhangi bir x kümesi alıp x'i ω'nın en sonuna en büyük eleman olarak koyalım. Böylece $\omega \cup \{x\}$ kümesi iyisıralanır. (Bkz. Altbölüm 5.1.) Bu yeni iyisıralamada x, tüm doğal sayılardan daha büyüktür. Ayrıca ω'nın bir üst katında oturan tüm iyisıralamalar



ω'nın üstkatındaki bir iyisıralama.
x, ω'da olmayan bir kümedir ve ω'nın en sonuna eklenmiştir.

bu biçimdedirler. Doğal sayılar da kendi aralarında doğal olarak sıralanmışlardır. ω, ω'nın bir elemanı olmadığından (bkz. Teorem 9.1), burada x yerine ω alabiliriz. Yani

$$S(\omega) = \omega \cup \{\omega\}$$

iyisıralaması, ω'nın oturduğu katın bir üst katında oturuyor.

Teorem 9.1. $\omega \notin \omega$.

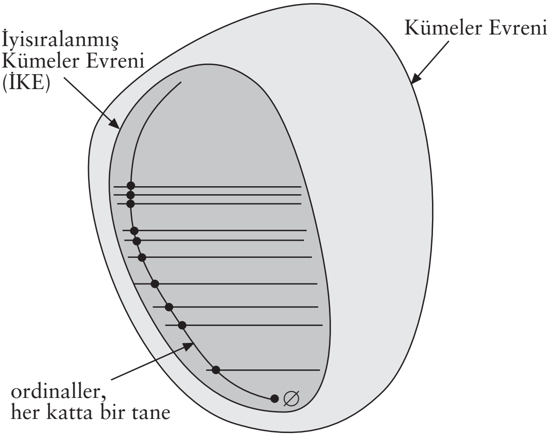
Kanıt. $\omega \in \omega$ olsa, ω bir n doğal sayısına eşit olur. O zaman da $S(n) \in \omega = n$ olur [Sİ]. Bu da $S(n) < n$ demektir. Ama $n < n + 1 = S(n)$ eşitsizliğinden dolayı $S(n) < n$ olamaz. $\square$

Her katın bir üst katı vardır. Eğer X bir iyisıralamaysa, X'te bulunmayan bir Y kümesini (ki vardır öyle bir küme, yoksa X tüm kümeleri içerirdi) alıp X'e eleman olarak ekleyelim ve Y'yi X'in tüm elemanlarından daha büyük yapalım. Böylece,

$$X \cup \{Y\}$$

kümesi iyisıralanmış olur ve bu iyi sıralı küme X'in oturduğu katın hemen bir üstünde oturur.

Eğer $X \notin X$ ise (ki eğer gerekmedikçe kabul etmek istemediğimiz Temellendirme Aksiyomu'nu kabul edersek $X \notin X$ olmak zorundadır, bkz [Sİ]), o zaman $Y = X$ alabiliriz ve böylece iyisıralanmış $S(X) = X \cup \{X\}$ kümesini X'in bir üst katında buluruz.



Şimdi önümüzdeki birkaç bölümün ana hedefini söyleyelim: Her iyisıralanmış kümeler katından bir ve sadece bir tane temsilci seçeceğiz ve bunu olabildiğince doğal biçimde yapacağız. Bu temsilcilere ***ordinal*** adını vereceğiz.

Her katta en fazla bir ordinal olacak. Bunu kanıtlaması kolay. Ve her katta en az bir ordinal olacak. Bunu kanıtlamak daha zor. Hatta şu anki halimizle imkânsız. Bunu kanıtlamak için adına ***Yerleştirme Aksiyomu*** diyeceğimiz yeni bir aksiyoma ihtiyacımız olacak. Bu aksiyoma neden gereksindiğimizi anlatmaya çalışacağız, yani okura bu gereksinimi hissettirmeye çalışacağız.

10. Ordinaller

10.1. Tanım

Bir α kümesine ordinal denmesi için iki koşul gerçekleşmelidir. Koşullardan ilki şu.

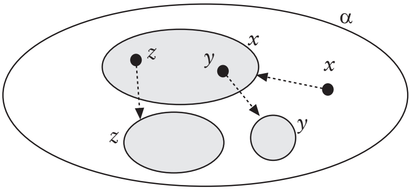
Ord1. α*'nın her elemanı*, *aynı zamanda* α*'nın bir altkümesidir*.

Bu koşul, tam tamına,

$$(y \in x \in \alpha) \Rightarrow y \in \alpha$$

diyor, yani α'nın elemanlarının elemanları α'nın elemanlarıdır diyor, yani α'nın her elemanı α'nın altkümesidir diyor.

Ord1 özelliği sağlayan kümelere $\in$-***kapalı***[1] denir. Biraz zor gerçekleşen bir koşul olduğu düşünülebilir, ama boşkümenin



$\in$-kapalı bir α kümesi: α'nın her öğesi α'nın bir altkümesi

(yani 0'ın) $\in$-kapalı olduğu çok bariz. Aslında her doğal sayı, [Sİ]'de tanımlandığı biçimde, $\in$-kapalıdır. Doğal sayılar küme-

---

1 İngilizcesi $\in$-complete.

si $\mathbb{N}$ de (yani ω da) $\in$-kapalıdır. Bunların kanıtını birazdan vereceğiz.

Eğer $x = \{y\}$ ve $y = \{x\}$ ise $\{x, y\}$ kümesi $\in$-kapalıdır[2].

Kolayca görüleceği üzere, $\in$-kapalı bir α kümesinde

$$x_n \in x_{n-1} \in \ldots \in x_1 \in \alpha$$

koşulları

$$x_n \in \alpha$$

koşulunu gerektirir. $\in$-kapalı kümelerin bize gerekecek birkaç özelliği daha var:

Önsav 10.1. *Elemanları $\in$-kapalı olan bir kümenin bileşimi ve kesişimi de $\in$-kapalıdır.*

Kanıt: A, elemanları $\in$-kapalı kümeler olan bir küme olsun. $y \in x \in \bigcup A$ varsayımını yapalım. O zaman, $\bigcup A$ kümesinin tanımı gereği, bir $\alpha \in A$ için, $y \in x \in \alpha$ olur. Ama α kümesi $\in$-kapalı olduğundan, bundan $y \in \alpha$ çıkar. Demek ki

$$y \in \alpha \subseteq \bigcup A,$$

yani $y \in \bigcup A$. Böylece $\bigcup A$ bileşiminin $\in$-kapalı olduğu kanıtlandı. $\bigcap A$ için kanıt aynıdır ve okura bırakılmıştır. □

Not 1. x herhangi bir küme olsun. $\emptyset$, x'in $\in$-kapalı bir altkümesidir. x'in tüm $\in$-kapalı altkümelerinin bileşimi x'in en büyük $\in$-kapalı altkümesidir.

Not 2. x herhangi bir küme olsun. x'i altküme olarak içeren $\in$-kapalı bir küme olduğunu (yani x'in $\in$-kapalı bir üstkümesi olduğunu) varsayalım. O zaman, x'in tüm $\in$-kapalı üstkümelerinin kesişimi x'in en küçük $\in$-kapalı üstkümesidir. (Bu kümelerin kesişimi neden bir kümedir?)

2 Öte yandan eğer Temellendirme Aksiyomu doğruysa $x = \{y\}$ ve $y = \{x\}$ eşitliklerini sağlayan x ve y kümeleri olamaz. (Bkz. [Sİ].)

Not 3. x herhangi bir küme olsun. x'i eleman olarak içeren en küçük $\in$-kapalı kümeyi bulmaya kalkışalım. $A_0 = \{x\}$ olsun. Eğer $n \in \mathbb{N}$ için, A_n tanımlanmışsa,

$$A_{n+1} = A_n \cup (\bigcup A_n)$$

olsun. Tanımdan dolayı A_n'nin elemanları A_{n+1}'in hem elemanları hem de altkümeleri. Şimdi $n = 0, 1, \ldots$ için A_n kümelerinin

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

bileşimini alalım. Eğer bu bileşim bir kümeyse, x'i eleman olarak içeren en küçük $\in$-kapalı kümedir. (Alıştırma.) Bölüm 12'de sözünü edeceğimiz Yerleştirme Aksiyomu kullanılarak $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ topluluğunun küme olduğu gösterilebilir.

$\in$-kapalı kümeler hakkında birkaç basit olgu kanıtlayalım. Eğer α bir kümeyse, $S(\alpha)$'nın

$$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$$

larak tanımlandığını anımsayalım [Sİ].

Önsav 10.2. *Eğer* α *kümesi* $\in$*-kapalıysa*, $S(\alpha)$ *da* $\in$*-kapalıdır*.

Kanıt: $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$ ve $y \in x$ olsun.

Eğer $x \in \alpha$ ise, α bir $\in$-kapalı küme olduğundan, $y \in \alpha$ olmalı. Ama ayrıca $\alpha \subseteq \alpha \cup \{\alpha\} = S(\alpha)$. Demek ki $y \in S(\alpha)$.

Eğer $x \notin \alpha$ ise, $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$ olduğundan, $x = \alpha$ olmalı. O zaman da $y \in x = \alpha$. □

Sonuç 10.3. *Her doğal sayı* $\in$*-kapalıdır*.

Kanıt: $0 = \emptyset$ olduğundan 0 sayısı $\in$-kapalıdır. Önsav 10.2 tümevarımla kanıt için zemini hazırlamıştır. □

Sonuç 10.4. *Doğal sayılar kümesi* $\in$*-kapalıdır*.

Kanıt: Her n doğal sayısı $S(n)$'nin yani $n+1$'in elemanı olduğundan, $\mathbb{N} = \bigcup\mathbb{N}$. İstediğimiz Sonuç 10.3'ten ve Önsav 10.1'den çıkar. □

Alıştırmalar

10.1.1. Eğer $a \subseteq \mathbb{N}$ altkümesi $\in$-kapalıysa, o zaman ya $a \in \mathbb{N}$ ya da $a = \mathbb{N}$ olduğunu kanıtlayın.

10.1.2. x herhangi bir küme olsun. $A_0 = \{x\}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$A_{n+1} = A_n \cup (\bigcup A_n)$$

olsun. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ bileşiminin bir küme olduğunu varsayıp, bu bileşimin x'i eleman olarak içeren en küçük $\in$-kapalı küme olduğunu kanıtlayın.

Bir α kümesine ordinal denmesi için ikinci koşul şu:

Ord2. *α kümesi $\in$ ikili ilişkisi tarafından iyisıralanmıştır.*

Ord2 aşağıdaki önermelerin topuna denktir:

Ord2a. *Eğer $x \in \alpha$ ise $x \notin x$.*

Ord2b. *Eğer $x, y, z \in \alpha$ ve $z \in y$ ve $y \in x$ ise $z \in x$.*

Ord2c. *Eğer $x, y \in \alpha$ ise ya $x \in y$ ya $x = y$ ya da $y \in x$.*

Ord2d. *Eğer A, α'nın boş olmayan bir altkümesiyse, öyle bir $a \in A$ vardır ki, her $b \in A$ için ya $a \in b$ ya da $a = b$.*

Ord1 ve Ord2 özelliklerini sağlayan bir kümeye ***ordinal*** denir.

Herhangi bir doğal sayı kümesi Ord2'yi sağladığından [Sİ], Sonuç 10.3 ve 10.4'ten her doğal sayının ve $\mathbb{N}$'nin ordinal oldukları çıkar.

Not 1. Ord2a, sıralama dilinde "x, x'ten küçük değil" diye okunur. Eğer Temellendirme Aksiyomu'nu doğru kabul edersek, hiçbir x kümesi için $x \in x$ olamayacağından bunu söylemeye gerek yoktur, zaten doğrudur [Sİ]. Ayrıca Ord2a'dan $\alpha \notin \alpha$ çıkar, çünkü aksi halde $\alpha \in \alpha$ olurdu ve Ord2a'ya göre $\alpha \notin \alpha$ olurdu!

Not 2. Ord2b, $\in$ ikili ilişkisinin geçişli bir ilişki olduğunu söylüyor. Sıralama dilinde bu şöyle ifade edilir: α'nın her x, y, z

elemanı için, z, y'den ve y de x'ten küçükse, o zaman z, x'ten küçüktür. Demek ki Ord2a ve 2b, α'nın $\in$ ilişkisi tarafından sıralandığını söylüyor. Dolayısıyla, bir ordinalin x ve y elemanları için, "$x < y$" ve "$x \in y$" ifadelerini ayırt etmeksizin kullanabiliriz. Demek ki ilk okuyuşta tuhaf gelebilecek ama yaşamı çok kolaylaştıran ve alışılması gereken şu önerme doğrudur: *Bir ordinalin her elemanı, kendinden küçük elemanların kümesidir*.

Eğer α bir ordinalse, α, Ord1'i sağladığından, Ord2b'de y ve z'nin α'nın elemanları olduğunu söylemeye gerek yoktur, bu zaten zorunlu olarak öyledir.

Eğer α bir ordinalse, Ord2b, ayrıca α'nın elemanlarının $\in$-kapalı olduklarını söylüyor. Buradan hareketle bir ordinalin elemanlarının da ordinal olduklarını kanıtlamak çok basittir. Birazdan bunu kanıtlayacağız.

Not 3. Ord2d, α'nın iyisıralandığını söylüyor. Nitekim, sıralamaca dilinde, Ord2d'de belirtilen a, A'nın en küçük elemanıdır.

Not 4. Ord2c, $\in$ ikili ilişkisinin α'yı tamsıraladığını söylüyor. Eğer Ord2d doğruysa, Ord2c'ye gerek yoktur, bu zaten doğrudur; bunu görmek için Ord2d'deki A altkümesini $\{x, y\}$ almak yeterlidir.

Kanıtların satır sayısında tasarruf sağlamak amacıyla bir kümeyi ordinal yapan en az sayıda özelliği yazalım:

Ord1. α'*nın her elemanı*, *aynı zamanda* α'*nın bir altkümesidir*.

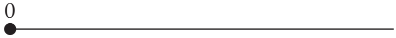
Ord2a. *Eğer* $x \in \alpha$ ise $x \notin x$.

Ord2b′. *Eğer* $x \in \alpha$ *ise ve* $z \in y$ *ve* $y \in x$ *ise o zaman* $z \in x$.

Ord2d. *Eğer* A, α'*nın boş olmayan bir altkümesiyse*, *öyle bir* $a \in A$ *vardır ki*, *her* $b \in A$ *için ya* $a \in b$ *ya da* $a = b$.

10.2. Ordinallerimizi Tanıyalım.

$\emptyset$'den, yani 0'dan değişik bir α ordinalinin ($\in$ ilişkisi için elbette, başka bir sıralama yok) bir en küçük elemanı olmalı. Nedir bu eleman? Bu en küçük elemana a dersek, $a \cap \alpha = \emptyset$ olmalı, çünkü $a \cap \alpha$'nın bir elemanı a'dan küçük olur. Öte yandan α ordinal olduğu için, $a \subseteq \alpha$. Demek ki $a = a \cap \alpha = \emptyset = 0$, yani ordinallerin en küçük elemanı boşkümedir, yani 0'dır.



0, boşküme olmayan her ordinalin en küçük elemanıdır.

İlk kez gören için, bu tür akıl yürütmeler biraz şaşırtıcı olabilir. Zamanla alışılıyor.

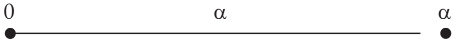
Birazdan bir ordinalin ikinci elemanının, eğer varsa elbet, 1 olduğunu kanıtlayacağız. 1'den sonraki eleman da 2 olmalı...

Eğer x bir α ordinalinin bir elemanıysa ama en büyük elemanı değilse, o zaman, α iyisıralı olduğundan, α'da x'ten hemen sonra gelen bir eleman vardır. Bu elemanı teşhir edelim. x'ten hemen sonra gelen elemana y diyelim. Küçüklüğün tanımından dolayı, y, kendisinden küçük elemanların (yani kendi

y, x'ten hemen sonra gelen eleman olsun. y, kendisinden küçük elemanlar kümesidir. Bu elemanlar da ya x'ten küçüktür ya da x'e eşittir. Demek ki $y = x \cup \{x\} = S(x)$.

elemanlarının!) kümesidir. Bu elemanlar da ya x'e eşittir ya da x'ten küçüktür. x'ten küçük olanlar tam tamına x'in elemanları olduğundan, $y = x \cup \{x\}$ buluruz.

Teorem 10.5. *Eğer α bir ordinalse, $S(\alpha)$ da bir ordinaldir.*



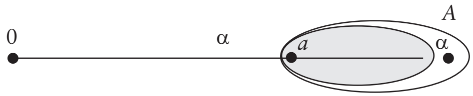
$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$

Kanıt: Önsav 10.2'de $S(\alpha)$'nın Ord1'i sağladığını gösterdik.

Ord2a'nın Kanıtı: $x \in S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ olsun. Diyelim $x \in x$. α bir ordinal olduğundan, x, α'da olamaz, çünkü Ord2a'ya göre bir ordinalde $x \in x$ ilişkisi yasak. Demek ki $x = \alpha$. Dolayısıyla $\alpha \in \alpha$. Ama α bir ordinal olduğundan, α'nın bir elemanı (bu eleman α bile olsa!) kendi elemanı olamaz. (Bu da alışık olmadığımız ilginç bir kanıtlardan!)

Ord2b'nin Kanıtı: $x \in S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ olsun ve $z \in y$ ve $y \in x$ ilişkilerini varsayalım. Eğer $x \in \alpha$ ise, α bir ordinal olduğundan $z \in x$. Eğer $x \notin \alpha$ ise, $x = \alpha$ olmak zorunda. Demek ki $z \in y$ ve $y \in \alpha$. Ama α ordinal olduğundan bundan $z \in \alpha = x$ çıkar.

Ord2d'nin Kanıtı: A, $S(\alpha)$'nın boş olmayan bir altkümesi olsun. Eğer $A \cap \alpha = \emptyset$ ise, o zaman $A = \{\alpha\}$ olmak zorunda ve



$A \subseteq S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$

$a = \alpha$ görevi görür. Öte yandan eğer $A \cap \alpha \neq \emptyset$ ise, o zaman

$$A \cap \alpha$$

kümesinin ($\in$ için elbette, başka sıralama yok) bir en küçük a elemanı vardır. a, A'nın en küçük elemanıdır. $\square$

Bu teoreme göre, bir ordinalin en küçük elemanı 0 olduğundan, 0'dan sonra gelen ilk eleman 1'dir. Sonra 2, 3, 4 gelir ve eleman kaldığı sürece bu böylecene devam eder.

10.3. Temel Olgular

Aşağıda kanıtlayacağımız teoremler ordinaller hakkında temel ve basit olgulardır. Ordinalleri hissetmenizde etkili olacaklarını umuyoruz.

Teorem 10.6. *Bir ordinalin her elemanı bir ordinaldir.*

Kanıt: α bir ordinal ve $x \in \alpha$ olsun. Ord2b'ye göre x, Ord1'i sağlar. Şimdi $\in$ ilişkisinin x'i iyisıraladığını kanıtlayalım. $x \subseteq \alpha$ olduğundan, x, α'yı iyisıralayan ilişki tarafından iyisıralanır. (Her iyisıralı kümenin altkümesi, üstkümeyi sıralayan ilişki tarafından iyisıralanmıştır.) Demek ki $\in$ ikili ilişkisi x'i de iyisıralar. $\square$

Teorem 10.7. *Eğer x bir α ordinalinin başlangıç dilimiyse, ya $x = \alpha$ ya da $x \in \alpha$'dır. Demek ki bir ordinalin bir başlangıç dilimi bir ordinaldir.*

Kanıt. α bir ordinal olsun ve x, α'nın bir başlangıç dilimi olsun. Eğer $x \neq \alpha$ ise a, $\alpha \setminus x$'in en küçük elemanı olsun. O zaman

$$x = \{y \in \alpha : y < a\} = \{y \in \alpha : y \in a\} = a \in \alpha$$

olmalıdır. □

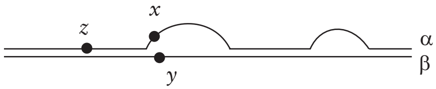
Teorem 10.8. β, α *ordinalinin bir altkümesi olsun.* β'*nın bir ordinal olması için* β'*nın* α'*nın bir başlangıç dilimi olması gerek ve yeterdir.*

Kanıt: β, α'nın başlangıç dilimiyse, sonuç bir önceki teoremde verildi. Şimdi α ve β birer ordinal ve $\beta \subseteq \alpha$ olsun. Her iki kümede de sıralamanın $\in$ ikili ilişkisi tarafından verildiğini aklımızda tutalım. β bir ordinal olduğundan, β'nın bir elemanından küçük bir eleman β'nın bir elemanıdır. Bu da β'nın α'nın bir başlangıç dilimi olduğunu gösterir. □

10.4. Derin Olgular

Teorem 10.9. *Eğer* α *ve* β *birer ordinalse*, *ya* $\alpha \in \beta$ *ya* $\alpha = \beta$ *ya da* $\beta \in \alpha$'*dır.*

Kanıt: Diyelim $\alpha \cap \beta$, hem α'nın hem de β'nın özaltkümesi. Bir çelişki elde edeceğiz. x, $\alpha \setminus \alpha \cap \beta$'nın ve y, $\beta \setminus \alpha \cap \beta$'nın en küçük elemanı olsunlar. $x = y$ eşitliğini kanıtlayabilirsek, işimiz iş, çünkü o zaman $x = y \in \alpha \cap \beta$ olacak ve istediğimiz çelişkiyi elde edeceğiz.



x ve y'nin rolleri simetrik olduğundan, $x \subseteq y$ ilişkisini kanıtlamak yeterli.

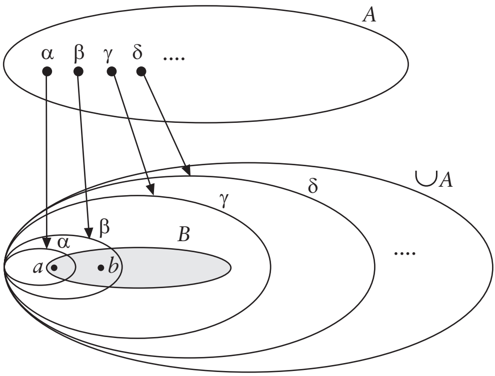
$z \in x$ olsun. Demek ki α ordinalinde $z < x$ eşitsizliği geçerli. x elemanı $\alpha \setminus \alpha \cap \beta$'nın en küçük elemanı olduğundan, bundan

$z \in \alpha \cap \beta$ çıkar. Dolayısıyla $z \in \beta$. Şimdi, ya $z = y$ ya $z \in y$ ya da $y \in z$. Bakalım hangisi. Birinci şıkta, $z = y \notin \alpha \cap \beta$, imkânı yok! Üçüncü şıkta, $z \in x$ ilişkisinden dolayı $y \in x$ elde ederiz, ki bundan da $y \in \alpha \cap \beta$ çıkar, gene çelişki. Dolayısıyla sadece ikinci şık mümkün: $z \in y$. Böylece $x \subseteq y$ içindeliğini elde etmiş oluruz. □

Teorem 10.10. *Boşküme olmayan herhangi bir ordinaller kümesinin bileşimi ve kesişimi de bir ordinaldir.*

Kanıt: Kesişimin ordinal olduğu belli: Kesişim, ordinaller kümesinin en küçük elemanına eşit. Bileşimin bir ordinal olduğunu kanıtlayalım.

A, bir ordinaller kümesi olsun. Her $\alpha \neq \beta \in A$ için, bir önceki teoreme göre, ya $\alpha \in \beta$ ya da $\beta \in \alpha$. Bunu kullanacağız.



A, ordinaller kümesi. Aslında şekil yanlış, çünkü, örneğin, α, β'nın bir elemanı olmalıydı. Doğru şekil kafa karıştırıcı demeye cesaret edemeyiz de, çok karmaşık.

$x \in \cup A$ olsun. O zaman, bir $\alpha \in A$ için, $x \in \alpha$ olur. Ama α ordinal olduğundan $x \subseteq \alpha$. Öte yandan, $\alpha \subseteq \cup A$. Demek ki $x \subseteq \cup A$. Ord1 kanıtlandı.

Ord2a'yı kanıtlayalım. Bu kolay: $x \in \cup A$ olsun. O zaman, bir $\alpha \in A$ için, $x \in \alpha$. Ama α ordinal olduğundan $x \notin x$.

Sıra Ord2b'de. Bu da kolay: $x \in \bigcup A$ ve $z \in y \in x$ olsun. O zaman, bir $\alpha \in A$ için, $x \in \alpha$. Ama α ordinal olduğundan $z \in x$.

Şimdi yukardaki teoremi kullanarak Ord2d'yi kanıtlayacağız. $\emptyset \neq B \subseteq \bigcup A$ olsun. O zaman A'da $\alpha \cap B \neq \emptyset$ önermesini sağlayan bir α vardır. α bir ordinal olduğundan, α'nın $\alpha \cap B$ altkümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana a diyelim. Bu a'nın B'nin en küçük elemanı olduğunu iddia ediyorum. $b \in B \setminus \{a\}$ olsun. Belli bir $\beta \in A$ için, $b \in \beta$. Teorem 6'ya göre a ve b birer ordinal. Teorem 9'a göre ya $a \in b$ ya da $b \in a$. İkinci durumda, $b \in a \in \alpha$ olacağından, $b \in \alpha$, yani $b \in \alpha \cap B$ ve bu da a'nın $\alpha \cap B$'nin en küçük elemanı olmasıyla çelişir. Demek ki $a \in b$ ve a, B'nin en küçük elemanı. □

Teorem 10.11. *Sıralı küme olarak eşyapısal olan iki ordinal birbirine eşittir.*

Kanıt: α ve β, $f : \alpha \to \beta$ eşyapısal eşlemesiyle eşyapısal olan iki ordinal olsun. O zaman, Teorem 10.9'a göre ya $\alpha \subseteq \beta$ ya da $\beta \subseteq \alpha$. Birincisini varsayabiliriz. O zaman, Teorem 10.8'e göre, $i(x) = x$ formülüyle tanımlanmış $i : \alpha \to \beta$ fonksiyonu da α'dan β'nın α başlangıç dilimine giden bir gömmedir. Önsav 7.6'ya göre $f = i$. Demek ki $\beta = f(\alpha) = i(\alpha) = \alpha$. □

Sonuç 10.12. *İyisıralı bir küme en fazla bir ordinale ve tek bir eşyapı eşlemesiyle eşyapısal olabilir.*

Kanıt: Eğer A iyisıralı (ya da sadece sıralı) kümesi α ve β ordinalleriyle eşyapısalsa, α ve β da birbiriyle eşyapısaldır, dolayısıyla yukardaki teoreme göre $\alpha = \beta$'dır. Eşyapısal eşlemenin biricikliği Önsav 7.6'dan çıkıyor. □

İlerde her iyisıralı kümenin bir ordinalle eşyapısal olduğunu kanıtlayacağız ama bunun için daha güçlü bir kümeler kuramına ihtiyaç duyacağız.

Teorem 10.13. *Eğer bir* α *ordinalinden bir* β *ordinaline giden bir eşyapı fonksiyonu varsa, o zaman ya* $\alpha = \beta$ *ya da* $\alpha \in \beta$*'dir. Dolayısıyla* $\alpha \subseteq \beta$ *ve* $\alpha \leq \beta$ *olur.*

Kanıt: $f : \alpha \to \beta$ sıralamayı koruyan bir fonksiyon olsun. Teorem 7.9'a göre $f(\alpha)$'nın β'nın bir başlangıç dilimi olduğunu varsayabiliriz. Teorem 10.7'ye göre ya $f(\alpha) = \beta$ ya da $f(\alpha) \in \beta$ ve $f(\alpha)$ bir ordinaldir. Teorem 11'e göre de $f(\alpha) = \alpha$. □

Sonuç 10.14. α *ve* β *ordinal olsunlar. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdir.*

1. $\alpha \in \beta$ *ya da* $\alpha = \beta$,

2. $\alpha \subseteq \beta$,

3. $\alpha \leq \beta$,

4. α, β*'nın bir başlangıç dilimi*,

5. α, β*'nın bir altkümesiyle eşyapısal.*

Alıştırmalar

10.4.1. α bir ordinal olsun. Eğer α'nın en büyük elemanı varsa bu elemanın $\cup\alpha$ olduğunu kanıtlayın. Eğer α'nın en büyük elemanı yoksa $\cup\alpha = \alpha$ eşitliğini kanıtlayın.

10.4.2. B bir ordinal kümesi olsun. $C \subseteq B$ şu özelliği sağlasın: "Her $\beta \in B$ için $\beta \leq \gamma$ eşitsizliğini sağlayan bir $\gamma \in C$ vardır". Bu durumda $\bigcup_{\beta \in B} \beta = \bigcup_{\gamma \in C} \gamma$ eşitliğini kanıtlayın.

10.4.3. $\alpha = S(\beta) = \beta \cup \{\beta\}$ olsun. α bir ordinalse, β'nın da bir ordinal olduğunu kanıtlayın.

10.4.4. α ve β birer ordinal olsunlar. $S(\alpha) = S(\beta)$ ise $\alpha = \beta$ eşitliğini kanıtlayın.

11. Limit Ordinaller ve Ordinallerde Tümevarım İlkesi

İyisıralı kümelerde tümevarımla kanıtlama yönteminden 6'ncı bölümde sözettik. O bölümde şu teoremi kanıtladık:

İyisıralamalarda Tümevarım İlkesi [Teorem 6.3]. $(X, <)$ *bir iyi sıralama olsun.* $A \subseteq X$ *bir altküme olsun.* A*'nın şu özelliği olduğunu varsayalım*:
Her $x \in X$ *için*, *eğer* $\{y \in X : y < x\} \subseteq A$ *ise*, *o zaman* $x \in A$.
Bu durumda $A = X$*'dir.*

Her ordinal iyisıralı bir küme olduğundan, aynı teorem ordinallerde de geçerlidir elbet. Ama ordinaller sözkonusu olduğunda, aynı teoremi başka türlü ifade etmek kanıtlarda bazı avantajlar sağlar.

Bazı ordinallerin en büyük elemanları vardır. Örneğin 5'in en büyük elemanı 4'tür. $S(\omega)$'nın en büyük elemanı ω'dır. Ama her ordinalin en büyük elemanı yoktur. Örneğin en büyük doğal sayı olmadığından, ω'nın en büyük elemanı yoktur. En büyük elemanı olmayan 0'dan değişik ordinallere ***limit ordinal*** denir. ω ilk limit ordinaldir. Limit ordinaller genelde λ (lambda) simgesiyle gösterilir.

Limit olmayan ve 0'dan değişik olan bir α ordinalinin en büyük elemanı β ise, $\alpha = S(\beta)$'dır elbet. (Okura basit bir alıştırma.)

Teorem 11.1. [Ordinallerde Tümevarım İlkesi] *Bir önerme,*

a) 0 *için doğruysa,*

b) *Bir* α *ordinali için doğru olduğunda* $S(\alpha)$ *ordinali için de doğruysa,*

c) *her* λ *limit ordinali için, önerme* λ*'dan küçük ordinaller için doğru olduğunda* λ *için de doğruysa,*

o zaman o önerme her α *ordinali için doğrudur.*

Kanıt: Önermeye $\varphi(x)$ diyelim. $\varphi(x)$'in her ordinal için doğru olmadığını varsayalım. Diyelim $\varphi(x)$, α ordinali için yanlış. $\beta = S(\alpha)$ olsun.

$$A = \{\gamma \in \beta : \varphi(\gamma) \text{ yanlış}\}$$

olsun. A bir kümedir ve bir ordinal kümesidir. $\alpha \in A$ olduğundan, $A \neq \emptyset$. O zaman A'nın bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana γ diyelim. Demek ki $\varphi(x)$ önermesi γ'dan küçük ordinaller için doğru. (a) varsayımına göre $\gamma \neq 0$. (b) varsayımına göre bir δ ordinali için $\gamma = S(\delta)$ olamaz. (c) varsayımına göre γ bir limit ordinal olamaz. Demek ki γ olamaz! □

Kimileyin bu ilke yerine kanıtı kullanılır. Diyelim ordinaller hakkında kanıtlamak istediğimiz bir $\varphi(\alpha)$ önermesi var. Bir an için φ'nin her α ordinali için doğru olmadığını varsayalım, diyelim φ önermesi α için doğru değil.

$$\{\beta \leq \alpha : \varphi(\beta) \text{ yanlış}\}$$

kümesine bakalım. α bu kümede olduğundan, bu ordinal kümesi boş değil. Demek ki bir en küçük elemanı var. O elemana β diyelim. Şimdi $\varphi(\beta)$ yanlış ama β'dan küçük her γ ordinali için $\varphi(\gamma)$ doğru. Buradan bir çelişki elde etmeye çalışılır. Bunun için önce β'nın 0 olamayacağı kanıtlanır. Sonra β'nın bir γ ordinali için $S(\gamma)$'ya eşit olamayacağı kanıtlanır. Ardından, β'nın bir limit ordinal de olamayacağı kanıtlanır. Böylece β'nın hiçbir şey olamayacağı anlaşılır ve bir çelişki elde edilir.

İlerde tümevarım ilkesini sık sık kullanacağımızdan örnek vermiyoruz.

Alıştırmalar

11.1. α bir ordinal olsun. α'nın limit ordinal olması için
$$\cup\alpha = \alpha$$
eşitliğinin yeter ve gerek koşul olduğunu kanıtlayın.

11.2. α limit olmayan bir ordinal olsun. $\alpha = S(\cup\alpha)$ eşitliğini kanıtlayın, yani $\cup\alpha$, α'nın en büyük elemanıdır.

11.3. Elemanları limit ordinaller olan ama boşküme olmayan bir kümenin bileşiminin de bir limit ordinal olduğunu kanıtlayın.

11.4. $A \neq \emptyset$, en büyük elemanı olmayan bir ordinaller kümesiyse $\cup A$'nın bir limit ordinal olduğunu kanıtlayın.

12. İyisıralı Kümeler, Ordinaller ve Yerleştirme Aksiyomu

Bu bölümde her iyisıralı kümenin bir ve bir tek ordinalle eşyapısal olduğunu kanıtlamaya çalışacağız ve bigüzel çuvallayacağız. [Sİ]'de verdiğimiz aksiyomlarla bu önerme kanıtlanamaz. Ama biz gene de inatla kanıtlamaya çalışacağız ve bildiğimiz kümeler kuramının nerede eksik kaldığını ayan beyan göreceğiz. Eksik kaldığımız yeri yeni bir aksiyomla tamamlayacağız.

Yeni aksiyomumuz bizce doğru olması gereken doğal bir önermedir. Ama okur, bu yeni aksiyomun doğallığına yeri geldiğinde kendi kendine karar vermelidir. Sonuç olarak, aksiyomların seçimi, neyin doğru olması gerektiği konusunda inanca dayanır.

Herhangi iyisıralı bir küme alalım. Bu kümeyle bir ordinal arasında sıralamayı koruyan bir eşleme, yani bir izomorfizma ya da Türkçesiyle bir eşyapı eşlemesi bulacağız, daha doğrusu bulmak istiyoruz.

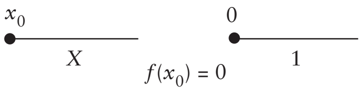
İyisıralı kümemize $(X, <)$ diyelim. Sonuç 10.12'ye göre, $(X, <)$ ancak tek bir α ordinaline eşyapısal olabilir ve X'le α arasında ancak tek bir eşyapı eşlemesi olabilir. Yani eğer X iyisıralı kümesinden bir α ordinaline giden bir $f : X \to \alpha$ eşyapı eşlemesi varsa, hem α hem de f bir tanedir.

Matematikte bir şeyden bir tane varsa o şeyi bulmak genellikle çok kolaydır. Matematikte zor olan, tek bir tane olan nesneleri bulmak değil, tam tersine çok olanlardan birini bulmaktır. Örneğin, eğer bir nesneden sonsuz tane varsa, kimileyin bu sonsuz tane olan nesnelerden birini bile bulmak mümkün olmayabilir. Bu ilginç ve bir o kadar da tuhaf olguya ilerde değineceğiz.

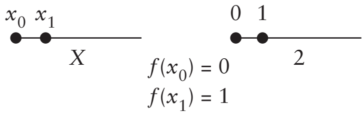
Tüm iyimserliğimizi takınıp başlıktaki önermeyi kanıtlamaya (çalışmaya) başlayalım.

Eğer X boşkümeyse, o zaman X, 0 ordinaline eşittir. Bu durumda X'in kendisi zaten bir ordinaldir. Fazla bir şey söylemeye gerek yok.

Eğer X boş küme değilse, X'in bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana x_0 diyelim. Eğer X'in bundan başka elemanı yoksa, o zaman X, 1 ordinaliyle eşyapısaldır elbette. Resmi aşağıda çizdik. Bu durumda, X'le 1 ordinali arasındaki (tek) eşyapı eşlemesi (hatta tek fonksiyon!) x_0'ı 0'a gönderen fonksiyondur.



Eğer X'in x_0'dan başka elemanları varsa, o zaman X'te x_0'dan hemen sonra gelen bir eleman vardır. Bu elemana x_1 diyelim. Eğer X'te x_1'den büyük başka eleman yoksa, yani X'te sadece x_0 ve x_1 elemanları varsa, o zaman X, 2 ordinaliyle eşyapısaldır. Bu durumda, X'le 2 ordinali arasındaki (tek) eşya-



pı eşlemesi x_0'ı 0'a, x_1'i 1'e gönderen fonksiyondur; en küçük eleman en küçük elemana, en büyük eleman en büyük elemana gitmelidir.

Eğer X'te x_1'den büyük elemanlar varsa, o zaman X'te x_1'den hemen sonra gelen bir eleman vardır. Bu elemana x_2 diyelim. Eğer X'te x_2'den büyük başka eleman yoksa, yani X'te sadece x_0, x_1 ve x_2 elemanları varsa, o zaman X, 3 ordinaliyle eşyapısaldır[1]. Bu durumda, X'le 2 ordinali arasındaki (tek) eşyapı eşlemesi x_0'ı 0'a, x_1'i 1'e, x_2'yi 2'ye gönderen fonksiyondur; en küçük

$$f(x_0) = 0$$
$$f(x_1) = 1$$
$$f(x_2) = 2$$

eleman en küçük elemana, en büyük eleman en büyük elemana gitmelidir.

Bunu böylece sürdürebiliriz... Eğer sonlu zamanda (her ne demekse!) X'in en büyük elemanına ulaşırsak, o zaman X iyisıralaması bir doğal sayıyla eşyapısaldır.

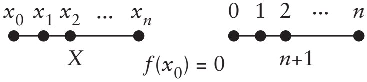
Eğer X'te $n + 1$ tane eleman varsa ve bu elemanları küçükten büyüğe doğru,

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$$

diye sıralarsak, o zaman X,

$$f(x_i) = i$$

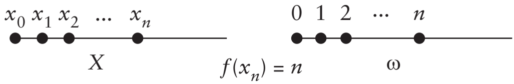
eşlemesiyle $n + 1$ ordinaline eşyapısaldır.



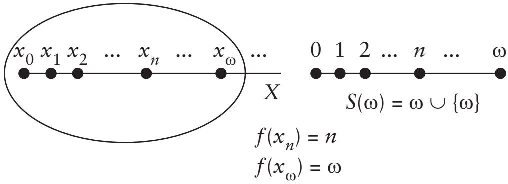
$$f(x_0) = 0$$
$$f(x_1) = 1$$
$$f(x_2) = 2$$
$$\ldots$$
$$f(x_n) = n$$

Ama X'in elemanlarını böyle teker teker sonlu zamanda bitiremeyebiliriz, X sonsuz da olabilir. Şimdi X'in sonsuz olduğunu varsayalım.

Eğer x_n, X'in $n + 1$'inci elemanıysa ve X'te bu x_n'lerden başka bir eleman yoksa, o zaman X'in ω'ya (yani $\mathbb{N}$'ye) benzediği, hatta $f(x_n) = n$ fonksiyonu sayesinde ω'yla eşyapısal olduğu aşikâr.



X'te bu x_n'lerden başka elemanlar da olabilir, neden olmasın? Tüm bu x_n'lerden büyük olan elemanların en küçüğüne x_ω diyelim. X'in, x_ω dahil olmak üzere, x_ω'ya kadar olan kısmı belli ki $S(\omega)$ ile eşyapısal[1].



Bunu böylece sürdürebiliriz... Ama nereye kadar sürdürebiliriz? X'in sonuna ulaşabilecek miyiz? Zamanın (istediğimiz kadar) sonsuz olduğu bir evrende yaşasaydık belki bu tür kanıtlar o evrenin matematiğinde kabul edilebilirdi, ama ne yazık ki öyle bir evrende yaşamıyoruz ve yukarda yapılanlar bir yere kadar kabul edilebilir. Daha matematiksel bir yöntem bulmalıyız.

Bu noktadan sonra matematik başlıyor.

12.1. Matematik Başlıyor

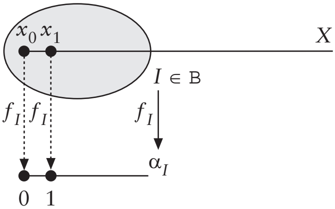
$(X, <)$ iyisıralı bir küme olsun. X'in bir ordinale eşyapısal olduğunu kanıtlamak istiyoruz.

X'in bir ordinale eşyapısal olup olmadığını bilmiyoruz henüz ama X'in bazı başlangıç dilimlerinin bir ordinale eşyapısal olduğunu biliyoruz. Örneğin, eğer X'te en az 10 eleman varsa, X'in ilk 10 elemanından oluşan küme (ki bu bir başlangıç dilimidir) 10 ordinaliyle eşyapısaldır.

1 Yazının Bölüm 4'e benzemeye başladığını okur fark etmiş olmalı.

$\wp$, X'in bir ordinale eşyapısal olan başlangıç dilimlerinin kümesi olsun. $\wp$, gerçekten bir kümedir. [Sİ]'de verdiğimiz aksiyomlardan hareketle $\wp$'nin bir küme olduğu kolaylıkla kanıtlanabilir.) Amacımız X'in $\wp$'de olduğunu kanıtlamak tabii.

Eğer $I \in \wp$ ise, I başlangıç diliminin eşyapısal olduğu tek bir ordinalin olduğunu biliyoruz (Teorem 10.11). Bu ordinale α_I adını verelim. Ayrıca, I başlangıç dilimiyle α_I ordinali arasında tek bir eşyapı eşlemesi olduğunu da biliyoruz (Sonuç 7.6 ya da 10.12). Bu eşyapı eşlemesine de f_I adını verelim.



Sav 1. *J ve I, $\wp$'den iki başlangıç dilimi olsun. O zaman ikisinden biri diğerinin altkümesidir. Ayrıca, eğer $J \subseteq I$ ve $x \in J$ ise, $f_J(x) = f_I(x)$ olur.*

Savın Kanıtı: I ve J, X'in başlangıç kümeleri olduğundan ikisinden biri diğerinin altkümesi olmalı (Bölüm 7.1). Diyelim $J \subseteq I$.

I ve J başlangıç dilimleri,

$$f_I : I \to \alpha_I$$

ve

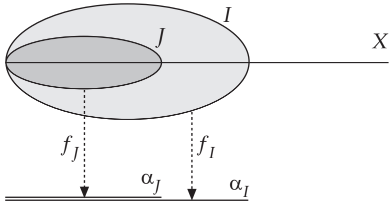
$$f_J : J \to \alpha_J$$

eşlemeleriyle, sırasıyla, α_I ve α_J ordinallerine eşyapısallar.

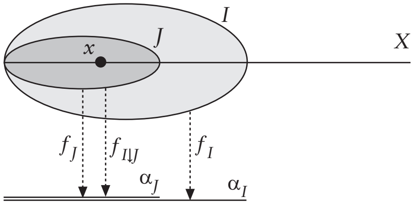
Eğer $\alpha_J \to J \subseteq I \to \alpha_I$ yolunu takip edersek, α_J'den α_I'ya giden

$$f_I \circ f_J^{-1} : \alpha_J \xrightarrow{f_J^{-1}} J \subseteq I \xrightarrow{f_I} \alpha_I$$

eşyapı fonksiyonunu buluruz. O zaman Teorem 10.13'e göre $\alpha_J \subseteq \alpha_I$ ve hatta α_J, α_I'nin bir başlangıç dilimi (Teorem 10.8).



Şimdi $f_I : I \to \alpha_I$ fonksiyonunu I'nin J başlangıç dilimine kısıtlayabiliriz, yani f_I'nin I'da aldığı değerlere bakacağımıza f_I'nin sadece J'de aldığı değerlere bakabiliriz. Eğer bu fonksi-



yonu $f_{I\downarrow J}$ olarak simgelersek, her $x \in J$ için, $f_{I\downarrow J}$ fonksiyonunun tanımı gereği,

$$f_{I\downarrow J}(x) = f_I(x)$$

olur. Demek ki

$$f_{I\downarrow J}(J) = f_I(J)$$

ve dolayısıyla $f_{I\downarrow J}(J)$, α_I'nin bir başlangıç dilimi (Önsav 7.5.i). Şimdi J'yi α_I'nin başlangıç kümelerine gömen iki eşyapı fonksiyonumuz var: biri f_J, diğeri $f_{I\downarrow J}$. Önsav 7.6'ya göre

$$f_J = f_{I\downarrow J}.$$

Bir başka deyişle, eğer $x \in J$ ise,

$$f_J(x) = f_I(x).$$

Savımız kanıtlanmıştır. $\square$

Bu sav bize parlak ve hatta tozpembe bir gelecek işaret ediyor. Sanki her şey yolunda gibi.

Şimdi amacımız $\wp$'nin elemanı olan başlangıç kümelerinin bileşimini alıp bunun X'e eşit olduğunu, yani

$$X = \bigcup_{I\in\wp} I$$

eşitliğini göstermek. Bir de α_I ordinallerinin bileşiminin bir ordinal olduğunu gösterebilirsek o zaman işimiz iş... Zaten bir ordinal kümesinin bileşiminin bir ordinal olduğunu biliyoruz (Teorem 10.10). Bu ordinale α diyelim:

$$\alpha = \bigcup_{I \in \wp} \alpha_I.$$

Bütün bunları yaptığımızı varsayarsak, X'ten α'ya giden şu eşyapı eşlemesini tanımlayabiliriz: Eğer $x \in X = \bigcup_{I \in \wp} I$ ise, o zaman $x \in I \in \wp$ ilişkilerini sağlayan bir I vardır. Şimdi,

$$f(x) = f_I(x) \in \alpha_I \subseteq \alpha$$

olarak tanımlayalım.

Sav 1'e göre, tanımda, $\wp$'nin x'i içeren hangi I başlangıç diliminin alındığı önemli değildir, tüm seçimler aynı sonucu verir. Bu aşamada f'nin X'ten α'ya giden bir eşyapı eşlemesi olduğunu kanıtlamak işten bile değildir. Zamanı geldiğinde yapacağız.

$\bigcup_{I \in \wp} I = X$ eşitliğini göstermek için küçük bir numara yapmamız gerekiyor. Bir an için $(X, <)$ iyisıralı kümesinin bir ordinale eşyapısal olmadığını varsayalım. X'in bir ordinale eşyapısal olmayan başlangıç dilimlerinin en küçüğünü alalım. Bu başlangıç dilimine şimdilik X' diyelim. Alıştırma 7.1.4'e göre böyle bir başlangıç dilimi vardır. Hem X hem de X' bir ordinale eşyapısal olmayan iyisıralı kümeler. Ama X' iyisıralamasının X'e göre bir ayrıcalığı var: X' iyisıralamasının kendisine eşit olmayan her başlangıç dilimi bir ordinale eşyapısal. Şimdi X yerine ayrıcalığı olan bu X' iyisıralamasını alabiliriz. Bundan böyle,

1. X'in bir ordinale eşyapısal olmadığını, ve

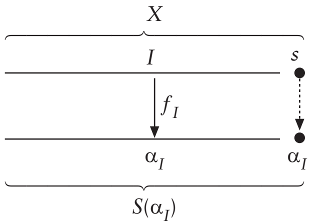
2. X'in X'e eşit olmayan her başlangıç diliminin bir ordinale eşyapısal olduğunu varsayıyoruz. Bir başka deyişle, $\wp$, artık X'e eşit olmayan X'in tüm başlangıç dilimleri.

Sav 2. *X'in en büyük elemanı olamaz.*

Kanıt: X'in en büyük elemanı olduğunu varsayalım. Bu elemana s diyelim. Şimdi,

$$I = \{y \in X : y < s\}$$

olsun. I, X'in bir başlangıç dilimidir. Ama s, I'da olmadığından, $I \neq X$. Demek ki I bir α_I ordinaline bir f_I eşyapı eşlemesi aracılığıyla eşyapısal. Ama $X = I \cup \{s\}$ ve $S(\alpha_I) = \alpha_I \cup \{\alpha_I\}$ ve X'in ve $S(\alpha_I)$'nin sıralamaları son derece uyumlu. f_I eşyapı eşlemesini I'dan X'e genişletmek çok kolay: Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi X'in en sonundaki s elemanını $S(\alpha_I)$'nin en sonundaki α_I elemanına yollayalım.



Böylece X ile $S(\alpha_I)$ arasında bir eşyapı eşlemesi bulduk. $S(\alpha_I)$ bir ordinal olduğundan (Teorem 10.5), bu bir çelişkidir. □

Artık $\bigcup_{I\in\wp} I = X$ eşitliğini kanıtlayabiliriz. $\wp$'nin X'in X'e eşit olmayan başlangıç dilimlerinin kümesi olduğunu anımsatırım.

Sav 3. $\bigcup_{I\in\wp} I = X$.

Kanıt: $x \in X$ olsun. x, X'in en büyük elemanı olmadığından (Sav 2), X'te x'ten büyük bir eleman vardır. Bu elemanlardan biri y olsun. O zaman,

$$I = \{z \in X : z < y\},$$

X'in x'i içeren ama y'yi içermeyen bir başlangıç dilimidir. Demek ki $x \in \bigcup_{I\in\wp} I$. □

İstediğimizin nerdeyse sonuna geldik.

Sıra, her $I \in \wp$ başlangıç diliminin eşyapısal olduğu α_I ordinallerinin bileşiminin bir ordinal olduğunu kanıtlamada, yani $\bigcup_{I\in\wp} \alpha_I$ bileşiminin bir ordinal olduğunu kanıtlamalıyız.

Sav 4. $\bigcup_{I \in \wp} \alpha_I$ *bir ordinaldir.*

Kanıt: Teorem 10.10'da bir ordinaller kümesinin bileşiminin gene bir ordinal olduğunu kanıtlamıştık. Demek ki bilmemiz gereken tek şey

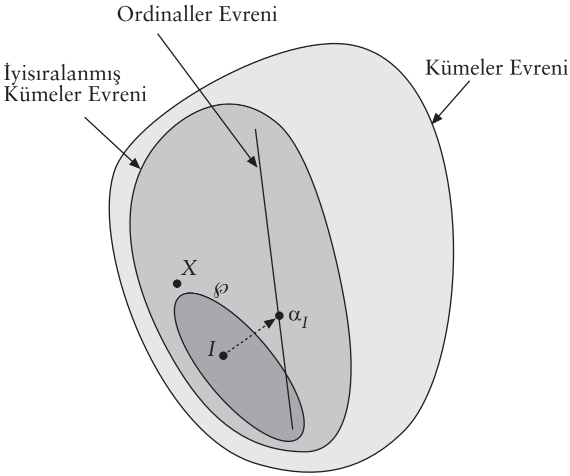
$$\{\alpha_I : I \in \wp\}$$

topluluğunun bir küme olduğu... Bunu bilirsek gerisi gelecek...

Maalesef bunu [Sİ]'de verdiğimiz aksiyomlarla kanıtlayamayız. Neden kanıtlayamayacağımızı biraz açıklamaya çalışayım.

Önce bir durum değerlendirmesi yapalım. Neyle karşı karşıyayız? $\wp$ bir küme; bundan kuşkumuz yok. Her $I \in \wp$ için α_I iyi tanımlanmış bir ordinal; bundan da kuşkumuz yok. Nitekim α_I, I iyisıralamasının eşyapısal olduğu yegâne ordinal, bir ikincisi daha yok.

Durumu özetleyen şöyle bir resim çizdik. Beğenilerinize sunuyoruz:

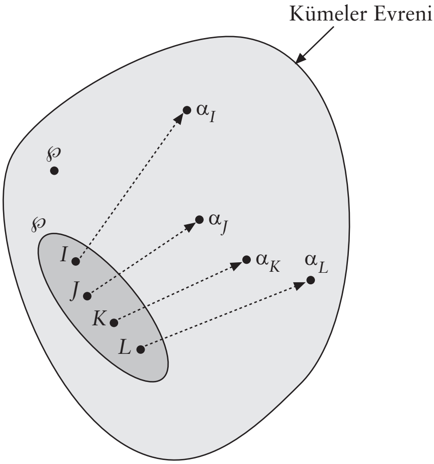


Aslında resim çok daha sade. Resmin iyi sıralanmış kümelerle ya da ordinallerle filan pek bir ilgisi yok. En yalın haliyle resim şöyle: $\wp$ bir küme. $\wp$'nin her I elemanı için bir ve bir tek α_I kümesi tanımlanmış. $\wp$'nin küme olduğundan hareketle,

$$\{\alpha_I : I \in \wp\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlamak istiyoruz.

Durumu bu daha yalın haliyle aşağıda resmettik.



Kritik soru: $\wp$ bir küme. $\wp$'nin her elemanı için α_I kümesi bir biçimde tanımlanmış. α_I'lerin topluluğu da bir küme olur mu?

Eğer $\wp$ sonluysa sorun yok, çünkü o zaman

$$\{\alpha_I : I \in \wp\}$$

topluluğu sonlu bir topluluk olur ve her sonlu topluluk gibi bu da bir küme olur. Sorun, $\wp$ sonsuz olduğunda.

Öte yandan eğer α_I'ler rastgele, yani hiçbir kurala bağlı olmaksızın seçilmişlerse (ki aslında böyle bir seçim fiziksel olarak mümkün bile değildir!) α_I'lerin topluluğunun bir küme olmasını bekleyemeyiz. Öte yandan burada özel bir durumla karşı karşıyayız. Her α_I, I'ya belli bir kuralla bağlı: α_I, I iyisıralamasının eşyapısal olduğu yegâne ordinal. Yani, eğer $\varphi(x, y)$, Türkçe söylediğimiz şu özelliğin

x bir sıralama ve *y*, *x'le eşyapısal olan bir ordinal*,

matematikçesini simgelerse, o zaman her $x \in \wp$ için $\varphi(x, y)$ formülünü sağlayan bir ve bir tane y kümesi vardır.

Şimdi sorumuzu soruyoruz:

Önemli Soru: *$\wp$ bir küme ve $\varphi(x, y)$ bir özellik olsun. Her $x \in \wp$ için, $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan bir ve bir tane y kümesinin olduğunu varsayalım. O zaman bir $x \in \wp$ için $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan y'ler bir küme oluşturur mu? Yani*

$$\{y : \exists x\ (x \in \wp \wedge \varphi(x, y))\}$$

topluluğu bir küme midir?

Tanımlanabilir Altküme Aksiyomu'ndan, eğer sorudaki y'leri içeren bir $\mathfrak{R}$ kümesi olduğu bilinirse, yani

$$\{y : \exists x\ (x \in \wp \wedge \varphi(x, y))\}$$

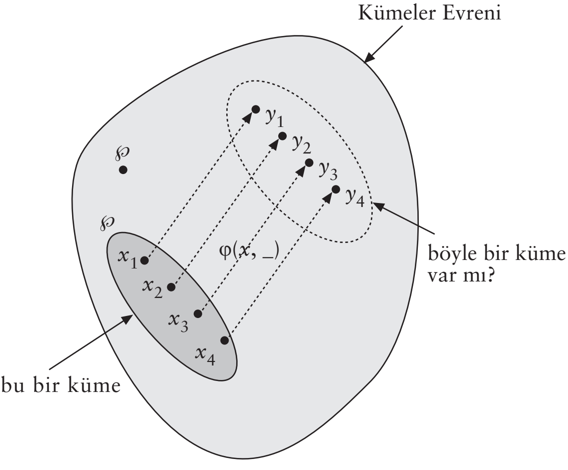
topluluğu aslında

$$\{y \in \mathfrak{R} : \exists x\ (x \in \wp \wedge \varphi(x, y))\}$$

ise, o zaman bunun bir küme olduğunu biliyoruz. Sorun, tüm y'leri eleman olarak içeren bir $\mathfrak{R}$ kümesinin olup olmadığını bilmediğimizde ortaya çıkıyor; bu şanssız durumda

$$\{y : \exists x\ (x \in \wp \wedge \varphi(x, y))\}$$

topluluğunun bir küme olduğuna hükmedemiyoruz.



$\wp$ bir küme olsun. Her $x \in \wp$ için, $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan bir ve bir tane y olduğunu varsayalım. O zaman, belli bir $x \in \wp$ için $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan y'ler bir küme oluştururlar mı?
Not: $\wp$ kümesinin elemanlarını $x_1, x_2, \ldots$ diye yazmamız okuru yanıltmasın, $\wp$ kümesi sayılabilir olmak zorunda değildir.

Bu arada $\varphi(x, \_)$'nın nerdeyse tanım kümesi $\wp$ olan bir fonksiyon tanımladığına dikkatinizi çekerim. Gerçekten de her $x \in \wp$ için bir ve bir tek y değeri veriyor. Tek eksiği değer kümesinin olmaması... Hatta değerleri içeren bir kümenin olmaması.

Sanırım soruyu ve sorunu yeterince tartıştık. Yanıtı vermenin zamanı geldi. Böyle bir kümenin varlığı [Sİ]'de verdiğimiz aksiyomların yardımıyla kanıtlanamaz. Bu kanıtlanamazlığın kanıtı zor olmasa da bizi konumuzdan bayağı saptıracağından kanıtı burada vermeyeceğiz.

Bir yandan böyle bir kümenin olmasını istiyoruz, çünkü her iyisıralamanın bir ordinal olması gerektiğini hissediyoruz (en azından ben öyle hissediyorum, ben dünyayı öyle algılıyorum), diğer yandan böyle bir kümenin varlığını kanıtlayamıyoruz. O zaman yeni bir aksiyom gerekiyor.

12.2. Yerleştirme Aksiyomu

İşte ihtiyacımız olan aksiyom:

Yerleştirme Aksiyomu. *$\wp$ bir küme ve $\varphi(x, y)$ bir özellik olsun. Her $x \in \wp$ için, $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan bir ve bir tane y kümesinin olduğunu varsayalım. O zaman bir $x \in \wp$ için $\varphi(x, y)$ özelliğini sağlayan y'ler bir küme oluştururlar. Yani*

$$\{y : \exists x\ (x \in \wp \wedge \varphi(x, y)\}$$

topluluğu bir kümedir.

Eğer Yerleştirme Aksiyomu'nun var olduğunu söylediği kümeye $\mathfrak{R}$ dersek, o zaman $\varphi(x, y)$ özelliği (ya da formülü), $\wp$ ile $\mathfrak{R}$ arasında bir eşleme verir. Mecazi konuşacak olursak, Yerleştirme Aksiyomu, $\wp$ kümesini $\mathfrak{R}$'ye yerleştirerek $\mathfrak{R}$'nin küme olduğuna hükmedebileceğimizi söylüyor.

Şimdi Sav 4'ün kanıtını tamamlayabiliriz. Yerleştirme Aksiyomu'na göre $\{\alpha_I : I \in \wp\}$ bir kümedir, hatta bir ordinal kümesidir. Dolayısıyla bu kümenin elemanlarının bileşimini aldığımızda bir küme buluruz: $\bigcup_{I\,\in\,\wp} \alpha_I$ bir kümedir. Hatta, Teorem 10.10'a göre bu bileşim bir ordinaldir. □

Teorem 12.1. *Her iyisıralı küme bir ve bir tek ordinale eşyapısaldır.*

Kanıt: İyisıralı bir kümenin iki değişik ordinale eşyapısal olamayacağını Teorem 10.11'den biliyoruz. Bulduklarımızı tekrarlayalım. Bir ordinale eşyapısal olmayan iyisıralı bir X kümesiyle başladık. Biraz uğraşla, X'in X'e eşit olmayan her I başlangıç diliminin bir α_I ordinaline eşyapısal olduğunu varsayabileceğimizi gördük. Sav 2'de, X'in en büyük elemanının olamayacağını gördük.

Eğer $\wp$, X'in X'e eşit olmayan başlangıç dilimlerinin kümesiyse, her $I \in \wp$ için, I'nin eşyapısal olduğu tek bir α_I ordinali ve I'dan α_I'ya giden tek bir f_I eşyapı eşlemesi vardır.

Yerleştirme Aksiyomu'na göre $\{\alpha_I : I \in \wp\}$ topluluğu elemanları ordinaller olan bir kümedir. Dolayısıyla bu kümenin bileşimi de bir ordinaldir. Bu ordinale α adını verelim.

$$\alpha = \bigcup_{I\,\in\,\wp} \alpha_I.$$

Ayrıca Sav 3'e göre $\bigcup_{I\in\wp} I = X$.

Bir de Sav 1 çok önemli: Eğer I ve J, $\wp$'delerse ve eğer $J \subseteq I$ ise ve $x \in J$ ise, o zaman $f_J(x) = f_I(x)$.

Şimdi X'ten α'ya giden şu f fonksiyonunu tanımlayabiliriz: Eğer $x \in X = \bigcup_{I\in\wp} I$ ise, $x \in I \in \wp$ ilişkilerini sağlayan bir I başlangıç dilimi vardır.

$$f(x) = f_I(x) \in \alpha_I \subseteq \alpha$$

olsun.

$$\begin{array}{ccc}
X = \bigcup_{I\in\wp} I & \xrightarrow{\ f\ } & \alpha = \bigcup_{I\in\wp} \alpha_I \\
\cup & & \cup \\
I & \xrightarrow{\ f_I\ } & \alpha_I \\
\cup & & \cup \\
J & \xrightarrow{\ f_J\ } & \alpha_J
\end{array}$$

Sav 1'e göre, $f(x)$'in tanımında, $\wp$'nin x'i içeren hangi I başlangıç diliminin alındığı önemli değildir, tüm seçimler aynı sonucu verir.

f'nin X'ten α'ya giden bir eşyapı eşlemesi olduğunu kanıtlamak kaldı geriye. Bu kolay:

f **Örtendir:** $\beta \in \alpha$ olsun. $\alpha = \bigcup_{I \in \wp} \alpha_I$ olduğundan, belli bir $I \in \wp$ için $\beta \in \alpha_I$ olmalıdır.

$$f_I : I \to \alpha_I$$

örten olduğundan, belli bir $x \in I$ için, $f_I(x) = \beta$ olmalıdır. Demek ki $f(x) = f_I(x) = \beta$. Ve, $x \in I \subseteq \bigcup_{I \in \wp} I = X$.

f **Sıralamaya Saygı Duyar:** $x, y \in X$ olsun. $x < y$ eşitsizliğini varsayalım. $X = \bigcup_{I \in \wp} I$ olduğundan, $I, J \in \wp$ için $x \in I$ ve $y \in J$. Ama I ve J, X'in başlangıç kümeleri olduklarından, ikisinden biri diğerinin altkümesi olmalı. Diyelim $J \subseteq I$. O zaman, hem x hem de y, I'nin elemanları. Dolayısıyla $f(x)$ ve $f(y)$'nin tanımlarında aynı I başlangıç dilimini alabiliriz:

$$f(x) = f_I(x),$$
$$f(y) = f_I(y).$$

Ayrıca, $f_I : I \to \alpha_I$ bir eşyapı eşlemesi olduğundan ve $x < y$ eşitsizliğinden, $f_I(x) < f_I(y)$ eşitsizliği çıkar.

Şimdi, $f(x) = f_I(x) < f_I(y) = f(y)$, yani $f(x) < f(y)$. İstediğimiz kanıtlanmıştır, X iyisıralı kümesi α ordinaline eşyapısaldır. □

12.3. Yerleştirme Aksiyomu'nun İzin Verdiği Kümeler

Eskiden küme olmayan toplulukların küme olduklarını Yerleştirme Aksiyomu'nu kullanarak kanıtlayabiliriz.

Örnek: $\{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \{\{\{0\}\}\}, \ldots\}$ *topluluğu bir kümedir.*

Aslında bu kümeyi böyle yazmak günah sınıfına olmasa da kabahat sınıfına sokulabilir, çünkü matematikte "nokta nokta nokta" diye bir simge yoktur.

Şunu kanıtlayacağız: $a_0 = 0$ olsun ve her $n \in \omega$ için, $a_{n+1} = \{a_n\}$ olsun. Öyle bir $\varphi(x, y)$ formülü vardır ki, $\varphi(x, y)$'nin doğru olması için yeter ve gerek koşul x'in bir doğal sayı olması ve y'nin a_x'e eşit olmasıdır.

$\varphi(x, y)$ formülünü yarı Türkçe yarı matematikçe yazacağız; sadece matematikçe yazarsak formülü gereksiz yere uzatmış oluruz.

$\varphi(x, y)$ formülü, önce $x \in \omega$ diyecek. Sonra

$$z = \{a_0, a_1, ..., a_{x-1}\}$$

diye bir kümenin varlığından sözedecek. Bunu şöyle söyleyeceğiz: Öyle bir z kümesi ve öyle bir $f : x \to z$ eşlemesi vardır ki, $f(0) = a_0$ ve her $0 \le i < x - 1$ için $f(S(i)) = \{f(i)\}$'dir.

Şimdi bir de ayrıca $y = \{f(x - 1)\}$ diyelim.

$x = 0$ şıkkı yukarda sorun yaratır. Eğer $x = 0$ ise $\varphi(x, y)$ formülü "$y = 0$" desin.

Böylece dilediğimiz gibi $\varphi(x, y)$ formülü bulduk. Şimdi Yerleştirme Aksiyomu'nu $\varphi(x, y)$'ye ve ω'ya uygularsak, eleman olarak sadece a_n'leri ($n \in \omega$) içeren bir kümenin varlığını kanıtlamış oluruz.

Not 1. Bu aşamaya kadar [Sİ]'de ve bu ders notlarında gördüğümüz kümeler kuramına Zermelo-Fraenkel kümeler kuramı adı verilir ve bu "teori" ZF olarak kısaltılır. Kümeler kuramınının son aksiyomu ileride göreceğimiz Seçim Aksiyomu'dur. ZF'ye Seçim Aksiyomu eklenerek elde edilen teori ZFC olarak yazılır.

Not 2. Artık her iyisıralı kümenin bir (ve bir tek) ordinale eşyapısal olduğunu biliyoruz ama henüz sayılamaz sonsuzlukta bir kümenin iyisıralanabileceğini, dolayısıyla sayılamaz sonsuzlukta bir ordinalin olduğunu bilmiyoruz. Böyle bir ordinalin varlığını ileride, Seçim Aksiyomu'nu kullanarak kanıtlayacağız. Daha ileri gidip, her kümenin iyisıralanabileceğini kanıtlayacağız.

Not 3. Ne ZF'de ne de ZFC'de tüm ordinaller topluluğu bir kümedir. Bunu bir sonraki altbölümde kanıtlayacağız.

12.4. Burali-Forti Paradoksu

Ω, tüm ordinaller kümesi olsun. O zaman, $\alpha = \cup\Omega$ bir ordinaldir (Teorem 10.10; aslında $\Omega = \alpha$, ama bunun hiçbir önemi yok) ve elbette ordinallerin en büyüğüdür. Ama $S(\alpha)$, α'dan daha büyük bir ordinaldir. Çelişki! (İhtiyacınız varsa Ord2a'yı da kullanın.)

Buna "Burali-Forti Paradoksu" denir. 1897'de Cesare Burali-Forti (1861-1931) tarafından bulunmuştur, Bertrand Russell (1872-1970) Paradoksu'ndan 4 yıl daha önce. Burali-Forti Paradoksu'nun bir benzeri iki yıl sonra Cantor tarafından bulunmuştur.

Cesare Burali-Forti

Tüm paradoksların kökeni aynıdır: Her biri çok çok "büyük" toplulukların küme olduklarını varsayar.

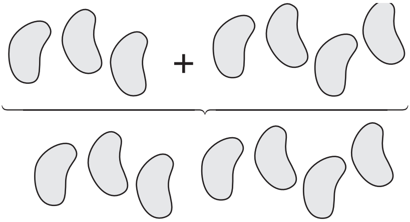
Dün paradoksa yol açan akıl yürütme bugün paradoks olmaktan çıkmıştır, çünkü ordinaller topluluğu Ω bir küme değildir! Ω'nın küme olmadığının kanıtı yukarda: Yoksa Burali-Forti Paradoksu gerçekten bir paradoks olurdu ve çelişki elde ederdik (olmayana ergi yöntemi).

Burali Forti, Peano'nun asistanlığını yapmıştır. 200'den fazla matematiksel makalesi vardır. Matematik eğitimi konusuna da eğilmiştir. Ancak Einstein'in izafiyet kuramına inanmamış ve (Tommaso Boggio ile birlikte) kuramın yanlışlığını göstermeye çalışan bir kitap yazmıştır.

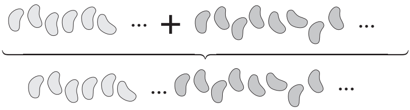
13. Ordinallerde Toplama İşlemi

13.1. Toplamanın Tanımı

İlkokulda doğal sayıları toplamayı nasıl öğrendiğinizi anımsayın. 3 + 4 = 7 yerine, 3 fasulye + 4 fasulye = 7 fasulye eşitliğini öğrenmişsinizdir önce herhalde. Öğretmen sola 3 fasulye dizmiştir. Bu grubun sağına dört fasulye daha dizmiştir. Sonra tüm fasulyeleri saymanızı rica etmiştir.



Öğretmen fasulyeleri sıraya dizmeden karışık koymuş olabilir. Sıraya dizerse, sayması daha kolay olur. Biz iyi öğretmenle okuduğumuzu varsayalım: Sayacağımız nesneler sıralansın.



Ordinaller de aynen fasulye toplar gibi toplanır.

Daha matematiksel olmak gerekirse... α ve β iki ordinal olsun. Bu iki ordinali toplamak için α tane fasulyenin **sağına** β tane fasulye koyarız ve böylece elde edilen fasulyeleri **soldan sağa** sayarız... Burada, "saymak"la "iyisıralamak"ı kastediyoruz.

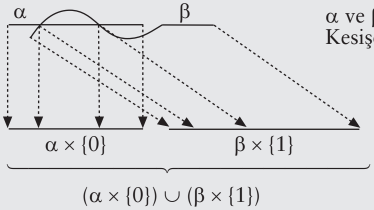
Daha daha matematiksel olalım. α ve β birer ordinal olsunlar. Aşağıdak şekilden takip edin. Ordinal olduklarından, α ve β iyisıralı kümelerdir: $\in$, yani "elemanı olmak" ilişkisiyle iyisıralanmışlardır. Altbölüm 5.2'de herhangi iki iyisıralı kümeyi toplamayı tanımlamıştık. Şöyle yapmıştık: Önce α ve β iyisıralı kümelerini $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümeleriyle değiştirmiştik, çünkü α ve β kümelerinin kesişmelerini istemiyorduk (bu iki küme eşit bile olabilirler!), her türlü kesişme olasılığına karşı önlem olarak α ve β yerine, kesişmediklerinden emin olduğumuz $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümelerini almıştık. Sonra, α ve β üzerindeki sıralamaları sırasıyla $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümelerine yansıtmıştık, yani her $a_1, a_2 \in \alpha$, $b_1, b_2 \in \beta$ için,

$$(a_1, 0) < (a_2, 0) \Leftrightarrow a_1 < a_2,$$
$$(b_1, 1) < (b_2, 1) \Leftrightarrow b_1 < b_2$$

tanımlarını yapmıştık. En sonunda da, kesişmediklerini bildiğimiz $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümelerinin

$$(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$$

bileşimini alıp bu bileşimi, $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ altkümelerinin sıralamalarıyla uyumlu olacak biçimde sıralamıştık. Bileşimin sıralaması, $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümelerinin sıralamasına saygı duyar, ve ayrıca, β'ya bir ayrıcalık tanıyarak, $\beta \times \{1\}$'in her elema-



α ve β iki iyisıralı küme. Kesişebilirler.

α ve β yerine, $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümeleri alınıyor. Bu kümeler kesişmezler. α ve β'nın sıralamalarını $\alpha \times \{0\}$ ve $\beta \times \{1\}$ kümelerine yansıtılıyor. Ayrıca $\alpha \times \{0\}$'ın elemanlarının $\beta \times \{1\}$'in elemanlarından daha küçük olduğuna hükmediliyor.

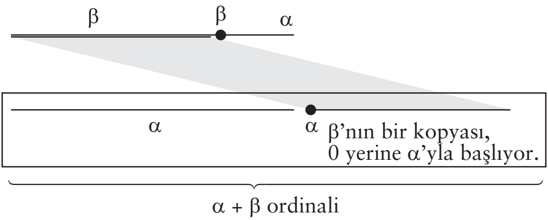
nını $\alpha \times \{0\}$'in her elemanından daha büyük ilan eder. Biçimsel tanım şöyle: Her $a_1, a_2 \in \alpha$, $b_1, b_2 \in \beta$ için,

$$(a_1, 0) < (a_2, 0) \Leftrightarrow a_1 < a_2,$$
$$(b_1, 1) < (b_2, 1) \Leftrightarrow b_1 < b_2,$$
$$(a_1, 0) < (b_2, 1) \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (yani her zaman!)}$$

Bunun bir iyisıralama olduğunu kanıtlayıp adına $\alpha + \beta$ demiştik (Altbölüm 5.2). Bu bölümde $\alpha + \beta$'yı bir başka anlamda kullanacağımızdan, $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$ kümesi üzerine tanımlanan yukardaki iyisıralamaya geçici olarak $\alpha \uplus \beta$ adını vereceğiz.

Akılda tutulması gereken şey şu: $\alpha \uplus \beta$ sıralamasında, özünde, β sıralaması, α'dan ayrık bir küme olarak α sıralamasının sonuna getirilmiştir.

Bir önceki bölümde her iyisıralı kümenin bir ve bir tek ordinale eşyapısal olduğunu kanıtlamıştık (Teorem 12.1). Dolayısıyla $\alpha \uplus \beta$ iyisıralaması da bir ve bir tek ordinale eşyapısaldır. İşte $\alpha \uplus \beta$ iyisıralamasına eşyapısal yegâne ordinale $\alpha + \beta$ adı verilir. Örneğin, $\beta < \alpha$ olduğunda, $\alpha + \beta$ ordinalinin şekli şöyle:



α'nın $\alpha + \beta$ ordinalinin başlangıç dilimi olduğu bariz olmalı. Eğer $\beta < \alpha$ ise, elbette β da $\alpha + \beta$ ordinalinin başlangıç dilimidir. Ama bu bizi pek ilgilendirmeyecek. Daha önemli olan β'nın $\alpha + \beta$ ordinalinin "son dilimi"ne eşyapısal olmasıdır. Nitekim,

$$\beta \approx \{x \in \alpha + \beta : \alpha \leq x\}$$

olur. Burada, sağ taraftaki $\{x \in \alpha + \beta : \alpha \leq x\}$ kümesi, $\alpha + \beta$'nın altkümesi olarak gene $\in$ ilişkisiyle (iyi)sıralanmıştır.

13.2. Temel Sonuçlar

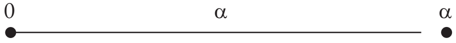
Hemen birkaç alıştırma yaparak ordinallerle toplama hakkında sezgi edinelim. İlk olarak doğal sayıları andıran bir olgu:

Önsav 13.1. *Her* α *ordinali için,*

$$0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha \textit{ ve } \alpha + 1 = S(\alpha).$$

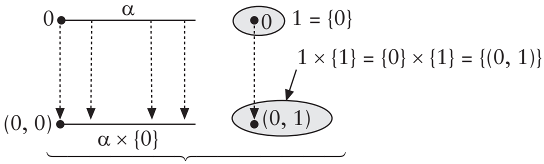
Kanıt: Son eşitliği kanıtlayalım, diğerleri bariz. Önce, $\alpha + 1$ ve $S(\alpha)$'nın tanımlarını anımsayacağız. Bunlar birer ordinal olarak tanımlanmışlardı. Bu ordinallerin eşit olduklarını kanıtlamak için, iyisıralamalarının eşyapısal olduklarını kanıtlamak yeterli, çünkü Teorem 10.11'e göre eşyapısal olan iki ordinal birbirine eşit olmak zorunda. Demek ki $\alpha + 1$ ve $S(\alpha)$'nın tanımlarında önemli olan nesnelerin kendileri değil, sıralamaları: Bu iki sıralı küme eğer eşyapısallarsa o zaman eşittirler.

Önce $S(\alpha)$'nın ve sıralamasının tanımlarını anımsayalım: $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ ve $S(\alpha)$ sıralamasında α elemanı α kümesinin en sonuna konmuştur. İşte $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ sıralamasının resmi:



$S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$

Bu kolaydı. Şimdi, bir sayfa önce tanımladığımız $\alpha + 1$'in sıralamasıyla eşyapısal olan $\alpha \uplus 1$ iyisıralamasını anımsayalım. $\alpha \uplus 1$ iyisıralamasında, 1 kümesi, ayrık bir küme olarak, α sıralamasının en sonuna eklenmişti; $1 = \{0\}$ olduğundan, bu, α'nın sonuna yeni bir eleman (0'ın bir kopyasını) eklemek demektir.



$\alpha \uplus 1 = (\alpha \times \{0\}) \cup (1 \times \{1\})$

Her iki sıralamanın da aynı oldukları, yani sıralamaların eşyapısal oldukları çok belli. Her ikisinde de α'nın en sonuna bir eleman ekleniyor. Önsavımız kanıtlanmıştır. □

Yukardaki yöntemi sürekli kullanacağız. İki ordinalin birbirine eşit olduklarını kanıtlamak için sıralamalarının birbirine eşyapısal olduklarını kanıtlamak yeterlidir.

Her ne kadar ordinal toplaması doğal sayıların toplamasını andırıyorsa da, doğal sayılarda geçerli olan $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ eşitliği ordinallerde maalesef geçerli değil, örneğin

$$1 + \omega = \omega \neq \omega + 1.$$

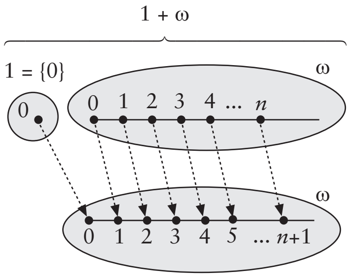
Hemen $1 + \omega = \omega$ eşitliğini göstererek okurun haklı merakını giderelim. Yukardaki kadar ayrıntılara girmeyeceğiz, yoksa bu bölüm bitmez. $1 + \omega$, yani $\{0\} \uplus \omega$ iyisıralamasında, 0 elemanının sonuna ω eklenmiştir, yani

$$\omega = \{0, 1, 2, ...\}$$

kümesinin en başına -1 gibi yorumlayabileceğimiz bir eleman eklenmiş ve

$$\{-1, 0, 1, 2, ... \}$$

kümesinin sıralamasına benzer bir sıralama elde edilmiş. Bu son sıralamanın ω'nın sıralamasından pek bir farkı yok, sayılar 0'dan



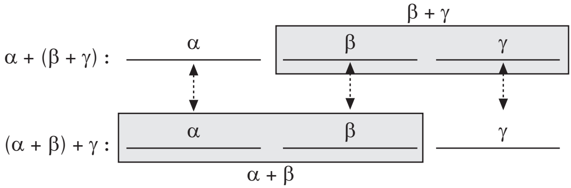
başlayacağına -1'den başlamış. Dolayısıyla $1 + \omega = \omega$. Öte yandan, $\omega + 1$'in en büyük elemanı olduğundan (ω, $\omega + 1$'in en büyük elemanıdır), $\omega + 1$, ω'ya eşyapısal olamaz, yani $\omega \neq \omega + 1$.

Ordinal toplaması doğal sayı toplamasıyla örtüşür, yani $5 + 8$, doğal sayı olarak da toplansa, ordinal olarak da toplansa 13 bulunur. Bariz olan bu sonuç, daha matematiksel olarak Önsav 13.1'den ve şimdi kanıtlayacağımız Önsav 13.2'den çıkacak. (Bkz. Sonuç 13.4.)

Önsav 13.2. *Her* α, β, γ *ordinali için*,
$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma.$$
Kanıt: Her zaman olduğu gibi, eşitliği değil,
$$\alpha + (\beta + \gamma) \approx (\alpha + \beta) + \gamma$$
eşyapısallığını kanıtlayacağız. Her iki sıralamanın da nasıl inşa edildiğini anımsayalım.

$\alpha + (\beta + \gamma)$ sıralaması için α sıralamasının sonuna $\beta + \gamma$ sıralaması getirildi. $\beta + \gamma$ sıralaması da β sıralamasının sonuna γ sıralaması konularak elde edildi. Demek ki $\alpha + (\beta + \gamma)$ sıralaması için önce α, sonra β, daha sonra da γ sıralamasını peşpeşe koyduk.

$(\alpha + \beta) + \gamma$ sıralaması için ise $\alpha + \beta$ sıralamasının sonuna γ sıralaması getirildi. $\alpha + \beta$ sıralaması da α sıralamasının sonuna β sıralaması konularak elde edildi. Demek ki $(\alpha + \beta) + \gamma$ sıralaması için, önce α, sonra β, daha sonra da γ sıralamasını peşpeşe koyduk.



Yukardaki şekilden ve sıralamaların tanımından da belli ki $\alpha + (\beta + \gamma) \approx (\alpha + \beta) + \gamma$. Yani eşitlik sözkonusu. □

Sonuç 13.3. *Her* α *ve* β *ordinalleri için*,
$$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1,$$
yani $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$.

Sonuç 13.4. *Doğal sayıların doğal sayı olarak ve ordinal olarak toplamı eşittir.*

Kanıt: Önsav 13.1'den dolayı ordinal olarak $n + 0 = n$, aynen doğal sayılardaki eşitlik. Gene Önsav 13.1'e göre sağdan 1'le toplamak da bir ayrım yaratmıyor. Şimdi $n + m$ toplamında bir fark olmadığını varsayarak, $n + (m + 1)$ toplamında bir ayrım olmadığını gösterelim. Ama bu, doğrudan Sonuç 13.3'ten çıkar. □

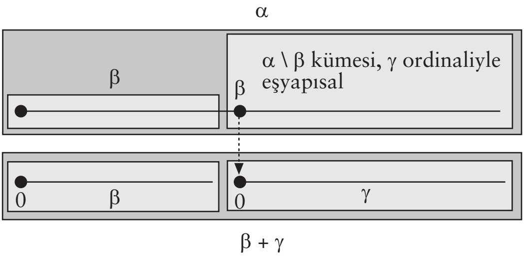
Bir sonraki önsavda göreceğimiz üzere ordinallerde doğal sayılardakine benzer bir çıkarma yapılabilir.

Önsav 13.5. $\beta \leq \alpha$ *iki ordinal olsun. O zaman*

$$\beta + \gamma = \alpha$$

eşitliğini sağlayan bir ve bir tane γ *ordinali vardır. Ayrıca eğer* α, β *ve* γ *birer ordinalse ve* $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ *ise o zaman* $\beta = \gamma$*'dır.*

Kanıt: Eğer $\beta = \alpha$ ise $\gamma = 0$ alabiliriz. Şimdi $\beta < \alpha$ varsayımını yapalım, yani $\beta \in \alpha$ ve dolayısıyla β, α'nın başlangıç dilimi. $\alpha \setminus \beta$, α'nın bir altkümesi olduğu için, α'nın sıralamasından miras kalan sıralamayla iyisıralı bir kümedir. Demek ki $\alpha \setminus \beta$ iyisıralamasına eşyapısal olan bir γ ordinali vardır. Şimdi $\alpha \approx \beta + \gamma$, yani $\alpha = \beta + \gamma$ çok bariz; kanıtının bir resmi aşağıda. γ ordi-



nalinin biricikliği ikinci önermeden çıkar. İkinci önermeyi kanıtlayalım.

Toplamanın tanımından dolayı, β, $\alpha + \beta$'nın $(\alpha+\beta) \setminus \alpha$ altkümesiyle eşyapısal. Aynı şekilde γ, $\alpha + \gamma$'nın $(\alpha + \gamma) \setminus \alpha$ altkümesiyle eşyapısal. Demek ki, $\beta \approx (\alpha + \beta) \setminus \alpha = (\alpha + \gamma) \setminus \alpha \approx \gamma$. Sonuç olarak $\beta = \gamma$. □

Bu önsavdan hareketle, eğer α sonsuz bir ordinalse, $1 + \alpha$ ordinalinin α'ya eşit olduğunu kanıtlayabiliriz. Ama önce "sonsuz ordinal"i tanımlamalıyız. Daha önce sonlu ordinalleri tanımlayalım: ω'nın elemanlarına ***sonlu ordinal*** denir. Sonlu olmayan, yani ω'nın elemanı olmayan ordinallere ***sonsuz ordinal*** denir. Demek ki bir α ordinalinin sonsuz olması için

$$\text{ya } \omega = \alpha \text{ ya da } \omega \in \alpha,$$
$$\omega \leq \alpha,$$
$$\omega \subseteq \alpha$$

eşdeğer önermelerinden biri (dolayısıyla hepsi) geçerli olmalı. (Sonuç 10.14)

Şimdi oldukça şaşırtıcı bir sonuç kanıtlayalım:

Önsav 13.6. *Eğer α sonsuz bir ordinalse ve n bir doğal sayıysa o zaman $n + \alpha = \alpha$'dır.*

Kanıt: α sonsuz bir ordinal olsun. Önsav 13.2'ye göre

$$1 + \alpha = \alpha$$

eşitliğini kanıtlamak yeterli, gerisi n üzerine tümevarımla gelir. Önsav 13.5'e göre, bir β ordinali için $\alpha = \omega + \beta$. Demek ki,

$$1 + \alpha = 1 + (\omega + \beta) = (1 + \omega) + \beta = \omega + \beta = \alpha.$$

Yukarda, Önsav 13.2'yi ve daha önce kanıtladığımız $1 + \omega = \omega$ eşitliğini kullandık. □

Demek ki sonlu ordinaller sonsuz ordinaller tarafından soldan yutuluyorlar. İlerde daha da şaşırtıcı bir teorem kanıtlayacağız, bkz. Teorem 16.5 ve Sonuç 16.6.

13.3. Toplama ve Sıralama

Aynı küme üzerinde çeşitli işlemler ve ilişkiler tanımlanmışsa, bu işlem ve ilişkiler arasında ilişkiler aramak ve hatta bulmak lazımdır, yoksa aynı küme üzerinde birbirinden bağımsız birkaç matematiksel yapı olur ki, o zaman da gereksiz yere kalabalık etmiş olurlar. Bu bölümde ordinallerde toplamayla sıralama arasındaki ilişkileri irdeleyeceğiz.

Önsav 13.7. *Her* α *ve* β *ordinali için*, $\alpha \leq \alpha + \beta$ *ve* $\beta \leq \alpha + \beta$. *Ayrıca eğer* $\beta \neq 0$ ise $\alpha < \alpha + \beta$.

Kanıt: $\alpha + \beta$ ordinalinin tanımına bakılacak olursa, α ve β sıralamalarının $\alpha + \beta$'nın birer altkümesiyle eşyapısal oldukları hemen anlaşılır. Nitekim α, $\alpha + \beta$'nın bir başlangıç dilimine eşyapısaldır; β da bu dilimden geri kalana eşyapısaldır. Teorem 10.13'e göre $\alpha \leq \alpha + \beta$ ve $\beta \leq \alpha + \beta$.

Eğer $\beta \neq 0 = \emptyset$ ise, toplamanın tanımından da belli ki, α'nın eşyapısal olduğu başlangıç dilimi, $\alpha + \beta$'nın öz başlangıç dilimidir (yani $\alpha + \beta$'ya eşit değildir), çünkü $\alpha + \beta$'nın α başlangıç diliminden hemen sonra gelen eleman α'dır; dolayısıyla $\alpha \in \alpha + \beta$, yani $\alpha < \alpha + \beta$. □

Eğer $\beta \neq 0$ ise $\alpha < \beta + \alpha$ eşitsizliğinin doğru olmayabileceğini $1 + \omega = \omega$ eşitliğinden biliyoruz. Can sıkıcı ama böyle, yapacak bir şey yok.

Gene $1 + \omega = \omega = 0 + \omega$ eşitliğinden ordinal toplamasında her zaman sağdan sadeleştirmenin olmadığını biliyoruz. Peki ya soldan sadeleşme var mı? Evet! Bu Önsav 13.5'te kanıtlandı.

Önsav 13.8. *Her* α, β *ve* γ *ordinali için* $\beta < \gamma$ *ise o zaman* $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ *ve* $\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$ *olur. Ayrıca, eğer* $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ *ise o zaman* $\beta < \gamma$*'dır.*

Kanıt: Birinci eşitsizliğin olası birçok kanıtından biri: $\beta < \gamma$ varsayımını yapalım. Önsav 13.5'e göre, bir δ ordinali için $\beta + \delta = \gamma$ eşitliğini sağlanır. Demek ki, birinci eşitsizliği kanıtlamak için,

$$\alpha + \beta < \alpha + (\beta + \delta)$$

eşitsizliğini kanıtlamalıyız. Önsav 13.2'ye göre,

$$\alpha + \beta < (\alpha + \beta) + \delta$$

eşitsizliğini kanıtlamak aynı şey. Önsav 13.7'nin ikinci kısmına göre bu eşitsizliğin sağlanması için δ'nın 0 olmaması gerekir, ki β, γ'ya eşit olmadığından δ, 0 olamaz.

Ayrıca, Önsav 13.7'ye göre $\alpha \leq \delta + \alpha$ olduğundan, yukarda kanıtlanandan $\beta + \alpha \leq \beta + (\delta + \alpha)$ çıkar. Demek ki,
$$\beta + \alpha \leq \beta + (\delta + \alpha) = (\beta + \delta) + \alpha = \gamma + \alpha.$$
İkinci eşitsizlik de kanıtlandı.

Şimdi, $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ varsayımını yapalım. Demek ki bir $\delta > 0$ ordinali için $(\alpha + \beta) + \delta = \alpha + \gamma$ ve
$$\alpha + \gamma = (\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta).$$
Şimdi Önsav 13.5'e göre $\gamma = \beta + \delta$ ve birinci kısma göre
$$\beta = \beta + 0 < \beta + \delta = \gamma.$$ □

Alıştırmalar

13.4.1. $\alpha \leq \gamma$ ve $\beta \leq \delta$ ve ise $\alpha + \beta \leq \gamma + \delta$ eşitsizliğini kanıtlayın.

13.4.2. $\alpha + \beta \leq \alpha + \gamma$ ise $\beta \leq \gamma$ eşitsizliğini kanıtlayın.

13.5. Limit Ordinaller ve Toplama

Şimdi çok ilginç bir teorem kanıtlayacağız. Ama önce bu aşamada okura kolay gelmesi gereken bir alıştırma:

Alıştırma 13.5.1. α ve β birer ordinal olsunlar. $\alpha + \beta$ ordinalinin limit ordinal olması için gerek ve yeter koşulun ya β'nın bir limit ordinal olması, ya da β'nın 0 ve α'nın bir limit ordinal olması olduğunu kanıtlayın.

Teorem 13.9. *Her sonsuz* α *ordinali bir* λ *limit ordinali ve bir* n *doğal sayısı için* $\lambda + n$ *olarak tek bir biçimde yazılabilir. Bu* λ, α*'dan küçükeşit en büyük limit ordinaldir*.

Kanıt: Eğer varsa, λ'nın α'dan küçükeşit en büyük limit ordinal olması gerektiği malum. Bu bilgi ışığında λ'yı arayalım. A, α'dan küçükeşit limit ordinaller kümesi olsun. A bir ordinal kümesi olduğundan, $\cup A$ da bir ordinaldir (Teorem 10.10). Ayrıca A'nın elemanları limit ordinaller olduğundan,

$\cup A$ da bir limit ordinaldir (Alıştırma 11.3). A'nın her elemanı α'nın bir altkümesi olduğundan, $\cup A$ da α'nın bir altkümesidir. Demek ki $\cup A \leq \alpha$. Bundan böyle $\cup A = \lambda$ olsun. Önsav 13.5'e göre $\lambda + \beta = \alpha$ eşitliğini sağlayan bir β ordinali vardır. Şimdi β'nın sonlu olduğunu, yani ω'nın bir elemanı olduğunu kanıtlayacağız. Eğer β sonsuzsa, yani $\beta \notin \omega$ ise, o zaman ya $\beta = \omega$ ya da $\omega \in \beta$'dır. Her iki durumda da $\omega \leq \beta$. O zaman $\lambda + \omega \leq \lambda + \beta = \alpha$ ve yukardaki alıştırmaya göre $\lambda + \omega$, α'dan küçükeşit bir **limit** ordinaldir. Ama o zaman da, $\lambda + \omega \subseteq \cup A = \lambda$ olur, bir çelişki.

Demek ki $\beta = n$, bir doğal sayıdır ve $\alpha = \lambda + n$. Eğer λ' limit ordinali ve n' doğal sayısı için $\alpha = \lambda' + n'$ ise, λ' de aynen λ gibi α'dan küçükeşit en büyük ordinal olduğundan, $\lambda' = \lambda$'dır. Şimdi,

$$\lambda + n = \alpha = \lambda' + n' = \lambda + n'$$

eşitliğinden ve Önsav 13.5'ten $n = n'$ çıkar. □

Bu teoremden şu ilginç sonuç çıkar. α ve β iki sonsuz ordinal olsun. α'yı teoremdeki gibi $\lambda + n$ olarak yazalım. O zaman, Önsav 13.6'ya göre,

$$\alpha + \beta = (\lambda + n) + \beta = \lambda + (n + \beta) = \lambda + \beta$$

Demek ki sonsuz ordinalleri toplarken, soldaki ordinalin bir limit ordinal olduğunu varsayabiliriz.

13.6. Tümevarımla Toplama

Daha önce $\alpha + 0 = \alpha$ ve $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$ eşitliklerini kanıtladık. [Sİ]'de doğal sayılarda toplamayı bu iki formülle tümevarım yöntemiyle tanımlamıştık, çünkü her doğal sayı ya 0'a eşittir ya da bir β doğal sayısı için $S(\beta)$ şeklinde yazılabilir. Ordinallerde bunun doğru olmadığını biliyoruz, buınların dışında bir de limit ordinaller var. Demek ki eğer her λ limit ordinali için $\alpha + \lambda$ ordinal toplamını λ'dan küçük β ordinalleri için $\alpha + \beta$ toplamları cinsinden yazabilirsek, o zaman ordinal toplamasını doğal sayılarda olduğu gibi tümevarımla tanımlayabiliriz.

Alıştırma 11.1'de okurdan her λ limit ordinalinin kendisinden küçük ordinallerin bileşimi olduğunu kanıtlamasını istemiştik:

$$\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \beta.$$

Demek ki,

$$\alpha + \lambda = \alpha + (\bigcup_{\beta<\lambda} \beta).$$

Bu aşamada ne kanıtlanması gerektiği belli:

$$\alpha + (\bigcup_{\beta<\lambda} \beta)$$

toplamındaki soldaki α'yı bileşimin içine dağıtıp

$$\alpha + \lambda = \alpha + (\bigcup_{\beta<\lambda} \beta) = \bigcup_{\beta<\lambda} (\alpha + \beta).$$

yazabilmek istiyoruz. Bunu hemen kanıtlayalım.

Önsav 13.10. *Eğer B bir ordinal kümesiyse,*

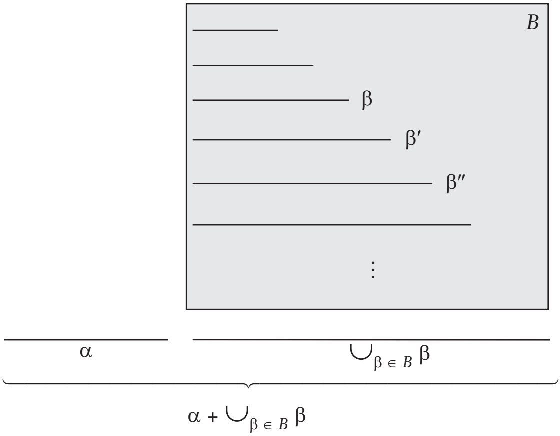
$$\alpha + (\bigcup_{\beta\in B} \beta) = \bigcup_{\beta\in B} (\alpha + \beta).$$

Kanıt: Önce Teorem 10.10'dan dolayı eşitliğin sağındaki ve solundaki kümelerin birer ordinal olduklarına dikkatiniz çekerim. Demek ki

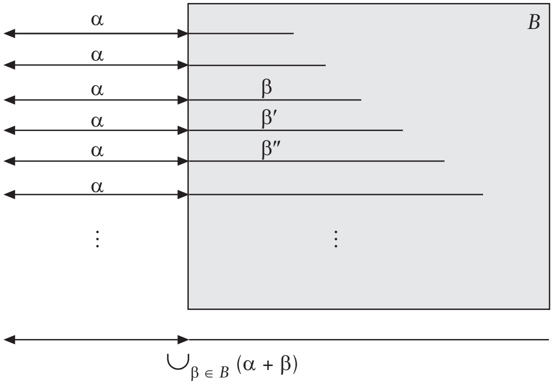
$$\alpha + (\bigcup_{\beta\in B} \beta) \text{ ve } \bigcup_{\beta\in B} (\alpha + \beta).$$

kümelerindeki sıralamaların eşyapısal olduklarını kanıtlamalıyız.

Önce $\alpha + (\bigcup_{\beta\in B} \beta)$ kümesinin sıralamasına bakalım. "Bir resim bin söze denktir" özdeyişinden hareket ederek bu kümenin ve sıralamasının bir resmini çizelim.



Şimdi $\bigcup_{\beta\in B} (\alpha + \beta)$ kümesini ve sıralamasını resmedelim. Bu sefer, önce $\alpha + \beta$ işlemlerini yapıp sonra bu toplamların bileşimini alacağız.



Görüldüğü gibi (!), her iki sıralama da aynı!

Bu görsel kanıttan memnun olmayanlar için daha biçimsel bir kanıt sunalım. *B*'nin boşküme olmadığını ve *B*'de boşküme olmadığını varsayabiliriz.

Önce $\alpha + (\bigcup_{\beta\in B} \beta)$ ordinalinden bir γ elemanı alalım. γ'nın

$$\bigcup_{\beta\in B} (\alpha + \beta)$$

kümesinde olduğunu kanıtlayacağız. Elbette $\gamma \geq \alpha$. Demek ki

$$\alpha \leq \gamma < \alpha + (\bigcup_{\beta\in B} \beta)$$

ve bir $\delta \in \bigcup_{\beta\in B} \beta$ için,

$$\gamma = \alpha + \delta$$

olur. Ayrıca $\delta \in \bigcup_{\beta\in B} \beta$ olduğundan, bir $\beta \in B$ için $\delta \in \beta$'dır. Demek ki $\gamma = \alpha + \delta < \alpha + \beta$, yani $\gamma \in \alpha + \delta \in \alpha + \beta$.

Şimdi $\bigcup_{\beta\in B} (\alpha + \beta)$ ordinalinden bir γ elemanı alalım. γ'nın

$$\alpha + (\bigcup_{\beta\in B} \beta)$$

kümesinde olduğunu kanıtlayacağız. Bir $\beta \in B$ için

$$\gamma \in \alpha + \beta$$

olur. γ'nın α'dan büyükeşit olduğunu varsayabiliriz, çünkü $\gamma < \alpha$ olursa, o zaman $\gamma \in \alpha \subset \alpha + (\bigcup_{\beta\in B} \beta)$ olur. Demek ki $\gamma \geq \alpha$ ve bir $\delta \in \beta$ için, $\gamma = \alpha + \delta$ olur. Öte yandan,

$$\beta \subseteq \bigcup_{\beta \in B} \beta$$

olduğundan, $\beta \leq \bigcup_{\beta \in B} \beta$ (Teorem 10.13). Demek ki

$$\gamma = \alpha + \delta < \alpha + \beta \leq \alpha + \bigcup_{\beta \in B} \beta. \qquad \square$$

Ve sözverdiğimiz gibi toplamanın tümevarımsal tanımı:

Sonuç 13.11. *Ordinal toplaması,*

$$\alpha + 0 = \alpha,$$
$$\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$$

ve bir λ limit ordinali için,

$$\alpha + \lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} (\alpha + \beta)$$

eşitlikleri tarafından belirlenmiştir. Bir başka deyişle, eğer A ve B birer ordinalse, öyle yeterince büyük bir C ordinali vardır ki, her $\alpha \in A$ ve $\beta \in B$ için,

$$f(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$$

kuralıyla tanımlanmış $f : A \times B \to C$ fonksiyonu, yukardaki üç eşitliği sağlayan ve $A \times B$ kartezyen çarpımından C'ye giden biricik fonksiyondur ve *ayrıca $f(\alpha, \beta)$'nın değeri α'yı içeren A'dan ve* α'yı *içeren B'den bağımsızdır.* $\square$

Birçok kitapta ordinallerin toplamı yukardaki formüllerle tanımlanır. Biz, daha doğal bulduğumuz bir yolu seçtik.

Bu sonuç, tümevarım ilkesiyle kanıtlanacak teoremlerde çok büyük kolaylık sağlar.

13.7. Kofinallik

α bir ordinal ve $A \subseteq \alpha$ olsun. Eğer her $\beta \in \alpha$ için, $\beta \leq \gamma$ eşitsizliğini sağlayan bir $\gamma \in A$ varsa, A'ya α'da ***kofinal*** ya da α'nın ***kofinal altkümesi*** denir. Eğer $A \subseteq B \subseteq \alpha$ ise ve A, α'da kofinalse, B de α'da kofinaldir elbette. Demek ki kofinal kümelerin küçükleri makbuldür. Ancak limit ordinallerin kofinal bir altkümesi olduğunu okurun dikkatine sunarız. (Alıştırma 13.7.1.)

Örneğin, kareler kümesi ω'da kofinaldir. $\{\omega + 3n : n \in \omega\}$ kümesi $\omega 2$'de kofinaldir. Ordinalleri ve üs almayı öğredіğimizde, $\{\omega n : n \in \omega\}$ kümesinin ω^2'de (Alıştırma 14.5), $\{\omega^n : n \in \omega\}$ kümesinin de ω^ω'de kofinal olduğunu (Önsav 16.3) göreceğiz.

Alıştırmalar

13.7.1. Ancak limit ordinallerin kofinal bir altkümesi olduğunu kanıtlayın.

13.7.2. α bir ordinal ve $A, B \subseteq \alpha$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $x \leq y \in B$ ilişkilerini sağlayan bir y varsa ve A, α'da kofinalse, o zaman B'nin de α'da kofinal olduğunu kanıtlayın.

13.7.3. λ bir limit ordinal olsun. $A \subseteq \lambda$ için, A'nın λ'da kofinal ise olması için yeter ve gerek koşulun $\lambda = \cup A$ eşitliği olduğunu kanıtlayın. λ bir limit ordinalse, λ'nın λ'da kofinal olduğunu kanıtlayın.

13.7.4. A, en büyük elemanı olmayan bir ordinaller kümesiyse, A'nın $\cup A$'da kofinal olduğunu kanıtlayın.

13.7.5. α ve λ ordinal olsunlar. λ limit ordinal olsun. $\alpha + \lambda$ ordinalinin limit ordinal olduğunu biliyoruz (Alıştırma 13.5.1).

$$\{\alpha + \beta : \beta \in \lambda\}$$

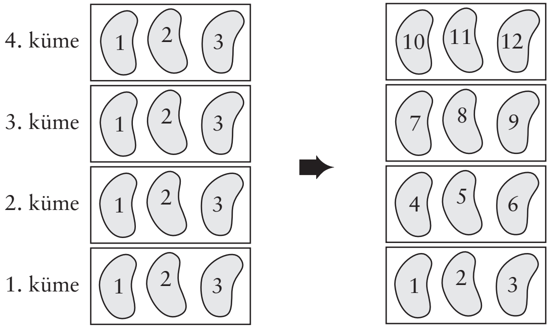
altümesinin $\alpha + \lambda$'da kofinal olduğunu kanıtlayın.

13.7.6. λ bir limit ordinalse, $\{\alpha : \alpha \in \lambda \text{ ve } \alpha \text{ limit}\}$ kümesinin λ'da kofinal olduğunu kanıtlayın.

14. Ordinallerde Çarpma İşlemi

14.1. Çarpmanın Tanımı

Gene ilkokul yıllarımızdan başlayalım. İlkokulda doğal sayıların çarpımını nasıl öğrendiğinizi anımsayın. $3 \times 4 = 12$ eşitliği için her biri içinde üç fasulye barındıran dört küme üstüste konur ve bütün fasulyeler teker teker sayılır.



Yukardaki şekilde fasulyeleri saymaya en alttan ve en soldan başladık ve sağa doğru gittik. En sağa ulaştığımızda bir üst sıranın tekrar en solundan başladık. Yani fasulyeleri yatay, fasulye kümelerini dikey sıraya dizdik, önce doğuya sonra kuzeye giderek saydık.

Ordinaller de işte aynen böyle çarpılır.

α ve β iki ordinal olsun. Her birinin içinde α tane fasulye bulunan β tane fasulye kümesini üstüste koyup yukardaki "önce doğu sonra kuzey" yöntemiyle sayalım. Burada saymakla aslında iyisıralamayı kastediyoruz.

Matematiksel tanımı birazdan vereceğiz. Önce tanım planımızı açıklayalım: α ve β, çarpımını tanımlayacağımız iki ordinal olsun. Ordinal olduklarından, α ve β iyisıralanmış kümelerdir. Önce $\alpha \times \beta$ kartezyen çarpımını iyisıralayacağız. Her iyisıralama gibi, iyisıralanmış $\alpha \times \beta$ kartezyen çarpımı da bir ordinale eşyapısaldır. $\alpha\beta$ çarpımını, $\alpha \times \beta$ kartezyen çarpımının eşyapısal olduğu ordinal olarak tanımlayacağız.

Bölüm 2.2.6'da X ve Y sıralı kümelerinin $X \times Y$ kartezyen çarpımının ***alfabetik sıralama*** denilen yöntemle nasıl sıralanabileceğini görmüştük. Ayrıca Bölüm 5.3'te eğer X ve Y iyisıralı kümelerse, bu alfabetik sıralamanın $X \times Y$'yi iyisıraladığını görmüştük.

Ordinaller sözkonusu olduğunda (nedendir bilinmez!) alfabetik sıralama değil, birazdan tanımlayacağımız ters alfabetik sıralama kullanılır.

$(X, <)$ ve $(Y, <)$ sıralı birer küme olsun. $X \times Y$ kartezyen çarpımı üzerine şu sıralamayı koyalım: $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ için,

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$$

ancak ve ancak

$$y_1 < y_2 \text{ ya da } y_1 = y_2 \text{ ve } x_1 < x_2$$

ise. Bu, aynen biraz önceki "önce doğu sonra kuzey" sıralamasıdır. (x, y) çiftleri önce y'lere göre sıralanırlar; y'ler eşit olduğunda x'lere bakılır. Bu, gerçekten bir sıralamadır. Bu sıralamaya ***ters alfabetik sıralama*** denir.

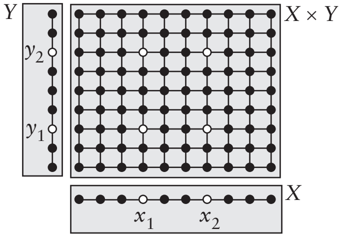
Örneğin eğer $X = \{a, b, c\} = Y$ ise ve her iki sıralamada da

$$a < b < c$$

ise, (x, y) yerine xy yazarsak, ters alfabetik sıralamada,

$$aa < ba < ca < ab < bb < cb < ac < bc < cc$$

olur.



$(x_1, y_1) < (x_2, y_1) < (x_1, y_2) < (x_2, y_2)$

Ayrıca eğer $(X, <)$ ve $(Y, <)$ iyisıralı kümelerse, $X \times Y$ de ters alfabetik sıralamayla iyisıralanır. Bunun kanıtı çok kolaydır ve aynen alfabetik sıralamada olduğu gibidir.

Her $y \in Y$ için, $X \approx X \times \{y\}$ ve her $x \in X$ için $Y \approx \{x\} \times Y$ olduğundan, eğer her ikisi birden boşküme değilse, X ve Y sıralamaları $X \times Y$'nin içine gömülürler. Eğer Y'nin en küçük elemanı varsa, diyelim y_0, o zaman, $X \times \{y_0\}$, $X \times Y$'nin başlangıç dilimi olduğundan, X, $X \times Y$'nin içine bir başlangıç dilimi olarak gömülür.

Şimdi ordinallere gelelim. α ve β birer ordinal olsun. Demek ki α ve β iyisıralı kümeler. Dolayısıyla $\alpha \times \beta$ kartezyen çarpımı ters alfabetik sıralamayla iyisıralanmıştır. Her iyisıralı küme gibi, iyisıralı $\alpha \times \beta$ kümesi de bir ordinale eşyapısaldır. İşte, ters alfabetik sıralanmış $\alpha \times \beta$'nın eşyapısal olduğu bu ordinale α'yla β'nın ***çarpımı*** denir. α ve β'nın bu çarpımı $\alpha\beta$ ya da $\alpha\cdot\beta$ olarak yazılır. Bir önceki paragrafta, eğer $\alpha, \beta \neq \emptyset$ ise, $\alpha \leq \alpha\beta$ ve $\beta \leq \alpha\beta$ eşitsizliklerinin kanıtlandığına dikkatinizi çekerim.

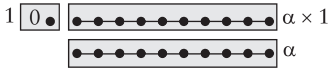
14.2. Temel Sonuçlar

Her şeyden önce, $0\cdot\alpha = \alpha\cdot 0 = 0$ eşitliği geçerlidir, çünkü $0 = \emptyset$ ve $\alpha \times \emptyset = \emptyset \times \alpha = \emptyset$.

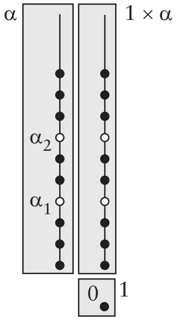
Sonra, $1\cdot\alpha = \alpha\cdot 1 = \alpha$, çünkü

$$\alpha \times 1 = \alpha \times \{0\} = \{(\beta, 0) : \beta \in \alpha\} \approx \alpha.$$

Burada, en sondaki $\approx$ işareti iki (iyi)sıralı küme arasındaki eşyapısallığı belirtiyor. Soldaki kartezyen çarpım ters alfabetik sı-



ralanmış, ama *y* koordinatı tek bir değer alabildiğinden ters ya da düz alfabetik sıralamalar arasında bir fark yok. Sağdaki ise bildiğimiz α ordinali... Resim yukarda.



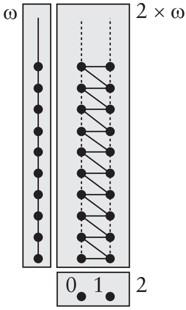
$(0, \alpha_1) < (0, \alpha_2) \Leftrightarrow \alpha_1 < \alpha_2$

Aynen bunun gibi, $1 \times \alpha \approx \alpha$'dır, yani $1 \cdot \alpha = \alpha$ ama bu sefer şekil yatay değil yanda görüldüğü gibi dikey. Dikey mikey, gene de eşyapısal.

$\alpha\beta = \gamma$ gibi bir ordinal eşitliği göstermek için, toplamada da yaptığımız gibi, $\alpha\beta \approx \gamma$ eşyapısallığını göstermek yeterlidir, çünkü eşyapısal iki ordinal eşit olmak zorundadır. Demek ki $\alpha\beta = \gamma$ eşitliği için, ters alfabetik sıralanmış $\alpha \times \beta$ ile γ'nın eşyapısal olduklarını göstermek yeterlidir.

Ordinal çarpmasında da toplamada olduğu gibi bazı sürprizler var. Soldan çarpmayla sağdan çarpma aynı sonucu vermez. Örneğin $2\omega = \omega$'dır, ama $\omega 2 \neq \omega$'dır.

Önce $2\omega = \omega$ eşitliğini görelim. Tanım gereği $2\omega \approx 2 \times \omega$ olduğundan, $2 \times \omega \approx \omega$ eşyapısallığını göstermek yeterlidir, çünkü o zaman $2\omega \approx \omega$ elde ederiz ve buradan $2\omega = \omega$ çıkar.



$2 \cdot \omega : (0, 0) < (1, 0) < (0, 1) < (1, 1) < (0, 2) < (1, 2) < \ldots$

$\omega : \quad 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots$

Resim yararlıdır, $2 \times \omega$'nın ve ters alfabetik sıralamasının bir resmini yaptık bir önceki sayfada. Bu resim ve açıklaması bize ordinal çarpması hakkında bayağı bir sezgi kazandıracak.

Resmin açıklaması: En alt kattan başlayarak önce soldan sağa, sonra aşağıdan yukarıya doğru zigzag sıraladığımızı anımsayın. $2 \times \omega$ kümesi, ters alfabetik sıralamayla,

$$(0, 0) < (1, 0) < (0, 1) < (1, 1) < (0, 2) < (1, 2) < \ldots$$

diye sıralanmış, aynen

$$\omega : 0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \ldots$$

sıralaması gibi. Daha biçimsel olarak, $2 \times \omega$ iyisıralamasıyla ω arasındaki eşyapı eşlemesi, $f(i, j) = 2j + i$ kuralıyla belirlenen

$$f : 2 \times \omega \to \omega$$

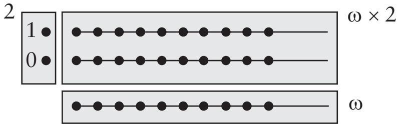
fonksiyonuyla verilmiş. (Herhangi iki iyisıralama arasında en fazla bir eşyapı eşlemesi olabilir.) Demek ki $2\omega \approx 2 \times \omega \approx \omega$ ve, 2ω ile ω eşyapısal ordinal olduklarından eşittirler.

Şimdi de $\omega 2$'nin nasıl bir sıralama olduğunu anlayalım.

$$\omega 2 \neq \omega$$

eşitsizliğini göreceğiz.

$\omega 2 \approx \omega \times 2$ olduğundan, bu kez $\omega \times 2$'nin ters alfabetik sıralamasına bakmak gerekiyor, yani bu kez ω yatay eksen, $2 = \{0, 1\}$ ise dikey eksen olacak. Şekil aşağıda.



$\omega \times 2 : (0, 0) < (1, 0) < (2, 0) < \ldots < (0, 1) < (1, 1) < (2, 1) < \ldots$

$(0, 0)$'dan başlayarak sağa gidiyoruz. İkinci koordinatı 0 olan $(n, 0)$ çiftlerini bitirdiğimizde, ikinci koordinatı 1 olan $(n, 1)$ çiftlerine sıra geliyor.

$\sqcup$ simgesinin ayrık kümelerin bileşimini simgelediğini anımsayarak,

$$\omega \times 2 = \omega \times \{0, 1\} = \omega \times \{0\} \sqcup \omega \times \{1\}$$

olarak yazabiliriz. Ters alfabetik sıralamada, $\omega \times \{0\}$ kümesinin her elemanı $\omega \times \{1\}$ kümesinin her elemanından daha küçüktür. Ayrıca $\omega \times 2$'nin hem $\omega \times \{0\}$ altsıralaması hem de $\omega \times \{1\}$ altsıralaması ω sıralamasıyla eşyapısaldır. Yani $\omega \times 2$ sıralamasında ω'nın bir kopyası olan $\omega \times \{1\}$, gene ω'nın bir kopyası olan $\omega \times \{0\}$'dan sonra konulmuştur, aynen $\omega + \omega$'da olduğu gibi... Demek ki $\omega 2 \approx \omega \times 2 \approx \omega + \omega$, yani $\omega 2 = \omega + \omega \neq \omega$.

Demek ki ordinaller çarpımında $\alpha\beta = \beta\alpha$ eşitliği her zaman doğru değildir, yani çarpma işlemi değişmeli değildir. Toplama da değişmeli değildi anımsarsanız.

Öte yandan $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ eşitliği (neyse ki!) doğrudur.

Önsav 14.1. *Eğer* α, β *ve* γ *birer ordinalse,*

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$$

Kanıt: $(\alpha\beta)\gamma$ ordinali, her bir kartezyen çarpımın ters alfabetik sıralanmış olduğu $(\alpha \times \beta) \times \gamma$ sıralamasıyla eşyapısaldır. $\alpha(\beta\gamma)$ ordinali ise, kartezyen çarpımların gene ters alfabetik sıralanmış olduğu $\alpha \times (\beta \times \gamma)$ sıralamasıyla eşyapısaldır. Dolayısıyla $(\alpha \times \beta) \times \gamma \approx \alpha \times (\beta \times \gamma)$ eşyapısallığını kanıtlamalıyız.

$(\alpha \times \beta) \times \gamma$ ile $\alpha \times (\beta \times \gamma)$ arasında doğal bir eşleme vardır,

$$f((a, b), c) = (a, (b, c))$$

eşlemesi. Bu eşlemenin sıralamaya saygı duyduğunu kanıtlamak istiyoruz. Demek ki

$$((a, b), c) < ((a', b'), c') \Leftrightarrow (a, (b, c)) < (a', (b', c'))$$

önermesini kanıtlamalıyız. Başlayalım:

$((a, b), c) < ((a', b'), c')$ eşitsizliğini varsayalım.

$$(a, (b, c)) < (a', (b', c'))$$

eşitsizliğini kanıtlayacağız. Eğer $c < c'$ ise $(b, c) < (b', c')$ olacağından, bu durumda sorun yok. Bundan böyle $c = c'$ eşitliğini varsayalım. O zaman $(a, b) < (a', b')$ olmak zorunda. Eğer $b < b'$ ise, $(b, c) = (b, c') < (b', c')$ olur, bu durumda da sorun yok. Bundan böyle bir de ayrıca $b = b'$ eşitliğini varsayalım. O zaman $a < a'$ olmak zorunda. O zaman da

$$(a, (b, c)) < (a', (b, c)) = (a', (b', c'))$$

olur ve bu durumda da sorun yok. $(a, (b, c)) < (a', (b', c'))$ eşitsizliğinden hareketle $((a, b), c) < ((a', b'), c')$ eşitsizliğini kanıtlamayı okura bırakıyoruz. □

$(1 + 1)\omega = 2\omega = \omega \neq \omega + \omega = 1\omega + 1\omega$ eşitliklerinden çarpmanın sağdan toplamaya dağılmadığını biliyoruz, yani

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

eşitliği her zaman doğru değil. Öte yandan

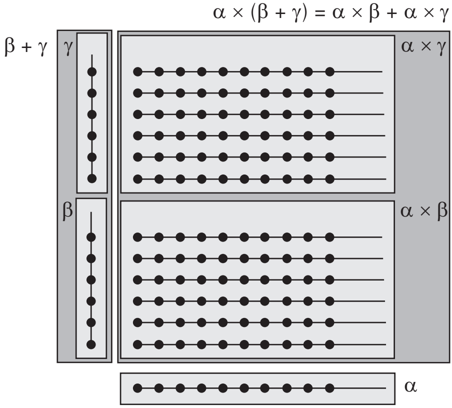
$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

eşitliği doğrudur:

Önsav 14.2. *Eğer* α, β *ve* γ *birer ordinalse,*

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

Kanıt: $\alpha \times (\beta + \gamma) \approx \alpha \times \gamma + \alpha \times \gamma$ eşyapısallığını kanıtlamalıyız. Aşağıdaki resmin yararlı olacağını ve daha fazla söze gerek olmayacağını umuyoruz. Gene de bir iki laf edelim:



$\alpha \times (\beta + \gamma)$'nın elemanlarını soldan sağa ve aşağıdan yukarı sayarken zorunlu olarak önce $\alpha \times \beta$'nın elemanlarını sayıyoruz, ardından $\alpha \times \gamma$'nın elemanlarını; bu da bize $\alpha \times \beta + \alpha \times \gamma$ sıralamasını verir. □

Sonuç 14.3. *Eğer α ve β birer ordinalse,*

$$\alpha(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha. \qquad \square$$

Sonuç 14.4. *Doğal sayıların doğal sayı olarak ve ordinal olarak çarpımı eşittir.*

Kanıt: 0 ve 1'ile çarpmanın uyuştuklarını gördük. Sonuç 14.3'ten dolayı n ile m'nin çarpımları uyuşuyorsa, n ile $m + 1$'in (yani $S(m)$'nin) de uyuşuyordur. Tümevarımla kanıt işi bitirir. $\square$

14.3. Çarpma ve Sıralama

Toplamayla çarpma arasındaki ilişki Önsav 14.2'de verilmişti. Şimdi sıralamayla çarpma arasındaki ilişkiyi irdeleyelim.

Önsav 14.5. *Eğer $\alpha < \beta$ ordinallerse, her $0 < \gamma$ ordinali için,*

$$\gamma\alpha < \gamma\beta,\ \alpha \leq \gamma\alpha \text{ ve } \alpha \leq \alpha\gamma$$

olur.

Kanıt: $\alpha < \beta$ olduğundan, bir $0 < \delta$ ordinali için, $\beta = \alpha + \delta$ (Önsav 13.5). Şimdi, Önsav 14.2'ye göre,

$$\gamma\beta = \gamma(\alpha + \delta) = \gamma\alpha + \gamma\delta > \gamma\alpha.$$

Burada ayrıca Önsav 13.7'yi kullandık.

Kanıtı $\gamma \times \alpha$'yı $\gamma \times \beta$'nın içine gömerek de yapabilirdik.

α, $\gamma\alpha$'nın (ya da $\gamma \times \alpha$'nın) içine $\{0\} \times \alpha$ olarak gömüldüğünden $\alpha \leq \gamma\alpha$.

$\alpha \leq \alpha\gamma$ eşitsizliğini, α'yı $\alpha \times \gamma$'nın içine $\alpha \times \{0\}$ olarak gömerek elde ederiz. $\square$

Sonuç 14.6. *α, β, γ ordinalleri için, $\gamma\alpha < \gamma\beta$ ise, o zaman $\alpha < \beta$. Ayrıca $\gamma > 0$ ve $\gamma\alpha = \gamma\beta$ ise, o zaman $\alpha = \beta$.*

Kanıt: İlk önerme: $\gamma = 0$ olamaz. $\alpha = \beta$ da olamaz. Eğer $\alpha > \beta$ olsaydı, Önsav 14.5'e göre $\gamma\alpha > \gamma\beta$ olurdu, çelişki.

İkinci önerme: $\alpha < \beta$ olsaydı, Önsav 14.5'e göre $\gamma\alpha < \gamma\beta$ olurdu, çelişki. $\square$

Önsav 14.7. *Eğer* α *ve* β *ordinalleri* $\alpha \le \beta$ *eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman her* γ *ordinali için,* $\alpha\gamma \le \beta\gamma$ *olur.*

Kanıt: $\alpha \le \beta$ olduğundan, $\alpha \times \gamma$ sıralaması $\beta \times \gamma$ sıralamasının bir altkümesi. Demek ki $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$'nın içine gömülüyor. Teorem 10.14'e göre $\alpha\gamma \le \beta\gamma$ olur. □

Önsavdaki ≤ küçükeşitlik simgesini < simgesiyle değiştiremeyiz, çünkü, örneğin $1 < 2$ ama $\omega = 2\omega$. Sağdan sadeleştirmenin doğru olmadığı aynı eşitlikten belli. Soldan sadeleştirme doğru ama (Sonuç 14.6).

14.4. Ordinallerde Bölme

Ordinallerde doğal sayılardakine benzer bir bölme işlemi vardır. Nasıl doğal sayılarda, 25'i 7'ye,

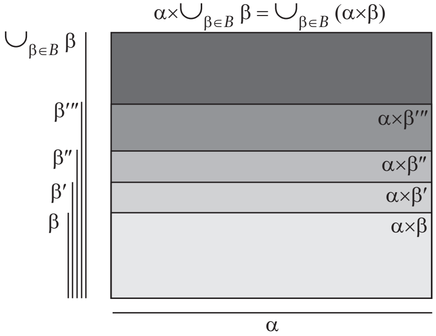
$$25 = 7 \times 3 + 4$$

olarak kalanlı bölebiliyorsak, ordinallerde de buna benzer bir bölme yapabiliriz.

Bölme teoremini kanıtlamadan önce daha sonra da ihtiyacımız olacak olan teknik bir önsavı aradan çıkaralım:

Önsav 14.8. *B bir ordinaller kümesi olsun.* α *bir ordinal olsun. O zaman* $\alpha(\bigcup_{\beta\in B} \beta) = \bigcup_{\beta\in B} \alpha\beta$ olur.

Kanıt: Aslında kanıt, aşağıdaki şekilden hemen hemen bariz olmalı. Okurun matematiksel bir kanıtla çok zaman geçirebileceği olasılığını dikkate alarak biçimsel kanıtı sunuyoruz.



Önce ordinallerde $\in$, $<$ ve $\subset$ ilişkilerinin eşdeğer olduklarını anımsatırız (Sonuç 10.14). $\beta \in B$ herhangi bir ordinal olsun.

$$\beta \subseteq \cup_{\beta\in B} \beta$$

olduğundan,

$$\beta \leq \cup_{\beta\in B} \beta.$$

Önsav 14.5'e göre, $\alpha\beta \leq \alpha(\cup_{\beta\in B} \beta)$. Demek ki

$$\alpha\beta \subseteq \alpha(\cup_{\beta\in B} \beta)$$

ve dolayısıyla

$$\cup_{\beta\in B} \alpha\beta \subseteq \alpha(\cup_{\beta\in B} \beta).$$

Eşitliğin her iki tarafında da ordinaller olduğundan, $\cup_{\beta\in B} \alpha\beta$ ordinali $\alpha(\cup_{\beta\in B} \beta)$ ordinalinin başlangıç dilimi olmalı. Öte yandan,

$$\begin{aligned}\cup_{\beta\in B} (\alpha\times\beta) &\approx \cup_{\beta\in B} \alpha\beta \subseteq \alpha(\cup_{\beta\in B} \beta)\\ &\approx \alpha \times \cup_{\beta\in B} \beta = \cup_{\beta\in B} (\alpha\times\beta).\end{aligned}$$

Demek ki $\cup_{\beta\in B} (\alpha\times\beta)$ ordinali kendisinin bir başlangıç dilimine gömülüyor. Bundan ve Sonuç 7.7'den bu gömmenin özdeşlik fonksiyonu Id olduğu ve $\cup_{\beta\in B} \alpha\beta \subseteq \alpha(\cup_{\beta\in B} \beta)$ içindeliğinin aslında eşitlik olduğu anlaşılır. □

Şimdi ordinallerde aynen doğal sayılardaki gibi bölme yapabileceğimizi kanıtlayabiliriz.

Teorem 14.9. *α ve β birer ordinal olsunlar. $\beta > 0$ olsun. O zaman $\alpha = \beta\gamma + \rho$ eşitliğini ve $\rho < \beta$ eşitsizliğini sağlayan bir ve bir tane (γ, ρ) ordinal çifti vardır.*

Kanıt: Önce (γ, ρ) çiftinin varlığını kanıtlayalım. γ'yı $\beta\gamma \leq \alpha$ eşitsizliğini sağlayan en büyük ordinal olarak alacağız.

Eğer $\beta\gamma \leq \alpha$ ise, Önsav 14.5'e göre $\gamma \leq \alpha$ olmalı (yoksa $\alpha \geq \beta\gamma > \beta\alpha \geq \alpha$, çelişki.) Demek ki,

$$\Gamma = \{\gamma : \beta\gamma \leq \alpha\} = \{\gamma \leq \alpha : \beta\gamma \leq \alpha\}$$

topluluğu bir kümedir ve elbette bir ordinal kümesidir. Dolayısıyla $\cup_{\gamma\in\Gamma} \gamma$ bir ordinaldir (Teorem 10.10). Önsav 14.8'den dolayı

$$\beta(\cup_{\gamma\in\Gamma} \gamma) = \cup_{\gamma\in\Gamma} \beta\gamma \subseteq \alpha$$

(çünkü eğer $\gamma \in \Gamma$ ise $\beta\gamma \leq \alpha$ ve $\beta\gamma \subseteq \alpha$). Demek ki $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma \in \Gamma$, ve $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma$, Γ'nın en büyük elemanı. Bu elemana γ diyelim. Özet olarak, γ, $\beta\gamma \leq \alpha$ eşitsizliğini sağlayan en büyük ordinal.

Önsav 13.5'e göre, $\alpha = \beta\gamma + \rho$ eşitliğini sağlayan bir ρ ordinali vardır.

Şimdi ρ ordinalinin β'dan küçük olduğunu kanıtlayalım. Tersini varsayalım: $\rho \geq \beta$ olsun. O zaman $\rho = \beta + \delta$ eşitliğini sağlayan bir δ vardır. Demek ki,

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta\gamma + \rho = \beta\gamma + (\beta + \delta) = (\beta\gamma + \beta) + \delta \\ &= \beta(\gamma + 1) + \delta \geq \beta(\gamma + 1)\end{aligned}$$

ve γ'dan daha büyük olan $\gamma + 1$, Γ'nın bir elemanı, bir çelişki. $\rho < \beta$ eşitsizliği kanıtlanmıştır.

Şimdi (γ, ρ) çiftinin biricikliğini kanıtlayalım. $\beta\gamma + \rho = \beta\gamma_1 + \rho_1$ eşitliğini ve $\rho, \rho_1 < \beta$ eşitsizliklerini varsayalım. $\rho = \rho_1$ ve $\gamma = \gamma_1$ eşitliklerini kanıtlayacağız. Eğer $\gamma = \gamma_1$ eşitliğini kanıtlarsak, o zaman sadeleştirerek (Önsav 13.5) $\rho = \rho_1$ eşitliğini elde ederiz. Demek ki $\gamma = \gamma_1$ eşitliğini kanıtlamalıyız. $\gamma \geq \gamma_1$ eşitsizliğini varsayalım. O zaman öyle bir δ vardır ki $\gamma = \gamma_1 + \delta$ (Önsav 13.5). Demek ki,

$$\begin{aligned}\beta\gamma_1 + \rho_1 &= \beta\gamma + \rho = \beta(\gamma_1 + \delta) + \rho \\ &= (\beta\gamma_1 + \beta\delta) + \rho = \beta\gamma_1 + (\beta\delta + \rho).\end{aligned}$$

Sadeleştirerek $\beta > \rho_1 = \beta\delta + \rho \geq \beta\delta$ elde ederiz. Dolayısıyla $\delta = 0$ ve $\gamma = \gamma_1 + \delta = \gamma_1$. □

Sonuç 14.10. *Eğer λ bir limit ordinalse, bir ve bir tek γ ordinali için $\lambda = \omega\gamma$ olur.*

Kanıt: Yukardaki teoreme göre bir γ ordinali ve bir n doğal sayısı için $\lambda = \omega\gamma + n$ olur. Limit ordinalin tanımına göre, $n = 0$ olmalı. □

Sonuç 14.11. *Eğer λ bir limit ordinalse, her n doğal sayısı için, $n\lambda = \lambda$'dır.* □

14.5. Çarpmanın Tümevarımsal Tanımı

Önsav 14.8'den (ve elbette Sonuç 14.3'ten) ordinallerde çarpmanın tümevarımsal bir tanımını elde edebiliriz.

Sonuç 14.12. *Ordinal çarpması*

$$\alpha 0 = 0,$$
$$\alpha S(\beta) = \alpha\beta + \alpha,$$

ve bir λ *limit ordinali için,*

$$\alpha\gamma = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha\beta$$

eşitlikleri tarafından belirlenmiştir. Bir başka deyişle, eğer A *ve* B *birer ordinalse ve* C, $A \times B$ *iyisıralamasına eşyapısal bir ordinal içeren bir ordinalse, o zaman, her* $\alpha \in A$ *ve* $\beta \in B$ *için,*

$$f(\alpha, \beta) = \alpha\beta$$

kuralıyla tanımlanmış $f : A \times B \to C$ *fonksiyonu, yukardaki üç eşitliği sağlayan ve* $A \times B$ *kartezyen çarpımından* C *ordinaline giden tek fonksiyondur.*

Alıştırmalar

14.1. α ve β ordinal olsunlar.

$$\alpha + \beta = \alpha \cup \{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\}$$
$$\alpha\beta = \{\alpha\theta + \rho : \theta < \beta \text{ ve } \rho < \alpha\}$$

eşitliklerini kanıtlayın.

14.2. $(\omega 2)\omega = \omega\omega$ eşitliğini kanıtlayın.

14.3. $(\omega + 1)\omega = \omega\omega$ eşitliğini kanıtlayın.

14.4. α bir ordinal olsun. $n \in \mathbb{N}$ için, α^n ordinalini tümevarımla şöyle tanımlayalım:

$$\alpha^0 = 1,$$
$$\alpha^{n+1} = \alpha^n\alpha.$$

$\{\alpha^n : n \in \omega\}$ topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın. **İpucu:** Yerleştirme Aksiyomu kullanılmalı; $\varphi(n, z)$ formülü şunu desin: n bir doğal sayıdır ve öyle A ordinaller kümesi ve

$$f : n + 1 \to A$$

eşlemesi vardır ki,

a) $f(0) = 1$ ve
b) her i için, eğer $0 \leq i \in n$ ise, $f(i+1) = f(i)\alpha$ ve
c) $z = f(n)$.

14.5. α bir ordinal olsun. λ bir limit ordinalse, $\alpha\lambda$'nın da limit ordinal olduğunu ve $\{\alpha\beta : \beta < \lambda\}$'nın $\alpha\lambda$'da kofinal (bkz. Bölüm 13.7) olduğunu kanıtlayın.

15. Ordinallerde Üs Alma Denemesi (Bir Fiyasko Öyküsü)

Geçen iki bölümde ordinallerde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlamıştık. α ve β ordinallerini (bu sırayla) toplamak için α sıralamasının sonuna β sıralamasını eklemiştik; çarpmak için ise $\alpha \times \beta$ kartezyen çarpımını ters alfabetik sıralamayla sıralamıştık.

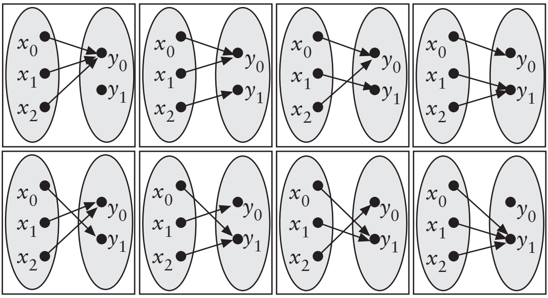
Ya "α üssü β" (yani α^{β}) ordinalini tanımlamak için ne yapmalı? Toplama ve çarpmaya benzetmeye çalışırsak, "α üssü β kadar" elemanı olduğunu düşündüğümüz bir Z kümesi bulup Z'yi iyisıralamalıyız ve α^{β} ordinalini de Z'nin bu iyisıralamasına eşyapısal olan biricik ordinal olarak tanımlamalıyız.

Eğer bu dediklerimizi bir de "doğal biçimde" yapmayı başarırsak, o zaman üs alma işleminin toplama ve çarpma işlemleriyle uyumlu olacağını umma hakkına sahip olabiliriz.

Doğal sayılardan esinlenelim. Eğer X ve Y, sırasıyla m ve n elemanı olan sonlu iki kümeyse, n^m tane elemanı olan bir küme bulabilir miyiz? Evet! X'ten Y'ye giden tam tamına n^m tane fonksiyon vardır. Nitekim, eğer

$$X = \{x_0, ..., x_{m-1}\}$$

ise, X'ten Y'ye giden bir f fonksiyonunu belirlemek için, X'in her x_i elemanı için Y'nin bir $f(x_i)$ elemanını belirlemeliyiz. Her bir x_i için tam n tane seçeneğimiz olduğundan, ve toplam m tane x_i olduğundan, X'ten Y'ye giden toplam fonksiyon sayısı tam tamına n^m'dir.

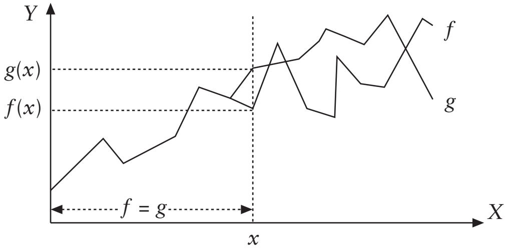


3 elemanlı $X = \{x_0, x_1, x_2\}$ kümesinden 2 elemanlı $Y = \{y_0, y_1\}$ kümesine giden $2^3 = 8$ fonksiyon.

Şimdi X ve Y iyisıralanmış iki küme olsun. Her iki kümenin sıralamasını da aynı simgeyle, $<$ simgesiyle gösterelim. Fonk(X, Y), X'ten Y'ye giden fonksiyonlar kümesi olsun. Fonk(X, Y) kümesi üzerine şu $<$ ikili ilişkiyi tanımlayalım:

$f < g \Leftrightarrow f \neq g$ ve eğer x, X'in $f(x) \neq g(x)$ eşitsizliğini sağlayan en küçük elemanıysa o zaman $f(x) < g(x)$.

Bu ikili ilişkinin bir tamsıralama olduğunu göreceğiz.



x'ten öncesine kadar $f = g$. Ama x'te f ve g değişik değerler alıyorlar. Eğer $f(x) < g(x)$ ise $f < g$ deniyor. x'ten sonra alınan değerlerin önemi yok. Fonksiyonların ayrıştıkları ilk noktaya bakılıyor.

Sayfanın başındaki resimde, 8 fonksiyonu yukarda tanımlanan ilişkiye göre küçükten büyüğe doğru sıraladığımıza dikkatinizi çekerim. Eğer bu örnekte, bir f fonksiyonunu,

$$(f(x_0), f(x_1), f(x_2))$$

üçlüsü olarak gösterirsek, o zaman fonksiyonlar küçükten büyüğe doğru (yani soldan sağa doğru) şöyle yazılırlar:

$$(y_0, y_0, y_0), (y_0, y_0, y_1), (y_0, y_1, y_0), (y_0, y_1, y_1)$$
$$(y_1, y_0, y_0), (y_1, y_0, y_1), (y_1, y_1, y_0), (y_1, y_1, y_1)$$

Eğer y_0 yerine 0, y_1 yerine 1 yazarsak ve parantezleri ve virgülleri atarsak, o zaman fonksiyonlar küçükten büyüğe doğru,

000, 001, 010, 011

100, 101, 110, 111

olarak yazılırlar. Sıralamaya dikkat ettiniz mi? Aynen sayılar gibi (mesela 2 tabanında):

0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, ...

Bundan da bu tanımın oldukça doğal bir tanım olduğu kanısına varabiliriz.

Yukarda tanımlanan ikili ilişkinin bir tamsıralama olduğunu kanıtlayalım.

1. Hiçbir f fonksiyonu için $f < f$ olamaz, çünkü tanımda $f < g$ olabilmesi için $f \neq g$ olması gerektiği yazıyor.

2. Şimdi $f < g$ ve $g < h$ eşitsizliklerini varsayıp $f < h$ eşitsizliğini kanıtlayalım. f ve g'nin ayrıştıkları ilk nokta x_0 olsun. Demek ki her $x < x_0$ için $f(x) = g(x)$ ama $f(x_0) < g(x_0)$. g ve h'nin ayrıştıkları ilk noktaya da x_1 diyelim. Üç şık var, üçünü de teker teker ele alalım.

Eğer $x_0 < x_1$ ise o zaman x_0'dan küçük her x için $f(x) = g(x) = h(x)$, ama $f(x_0) < g(x_0) = h(x_0)$. Demek ki x_0, f ve h'nin ayrıştıkları ilk nokta ve $f(x_0) < h(x_0)$. Tanıma göre $f < g$.

Eğer $x_0 = x_1$ ise o zaman x_0'dan küçük her x için $f(x) = g(x) = h(x)$ ama $f(x_0) < g(x_0) < h(x_0)$. Demek ki x_0, f ve h'nin ayrıştıkları ilk nokta ve $f(x_0) < h(x_0)$. Tanıma göre $f < g$.

Eğer $x_1 < x_0$ ise o zaman x_1'den küçük her x için $f(x) = g(x) = h(x)$ ama $f(x_1) = g(x_1) < h(x_0)$. Demek ki x_0, f ve h'nin ayrıştıkları ilk nokta ve $f(x_0) < h(x_0)$. Tanıma göre $f < g$.

Her üç durumda da $f < g$ eşitsizliğini gösterdik.

Demek ki fonksiyonlar kümesinde tanımlanan $<$ ilişkisi bir sıralamadır. Şimdi bu sıralamanın bir tamsıralama olduğunu gösterelim. Ama bu çok kolay... Eğer $f \neq g$, iki fonksiyonsa,

$$\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$$

boşküme değildir, dolayısıyla (X bir iyisıralama olduğundan) Y'nin $f(x) \neq g(x)$ eşitsizliğini sağlayan bir en küçük x elemanı vardır. Y bir tamsıralama olduğundan ya $f(x) < g(x)$ ya da $g(x) < f(x)$. Birinci durumda $f < g$, ikinci durumda $g < f$.

Buraya kadar her şey yolunda gitti ama bundan ötesi yolunda gitmeyecek. $F(X, Y)$ üzerine tanımladığımız bu tamsıralama ne yazık ki genellikle bir iyisıralama değildir; X ve Y'nin birer iyisıralama olduğu durumda bile.

Bir örnek verelim. $X = \omega$ ve $Y = 2 = \{0, 1\}$ olsun. X'ten Y'ye giden bir fonksiyonu bir 01-dizisi olarak gösterebiliriz. Örneğin,

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$$

dizisi çift sayılarda 0, tek sayılarda 1 değerini alan fonksiyonu simgelesin. Hatta terimlerin arasındaki virgülleri de atarak bu fonksiyonu,

$$01010101\ldots$$

olarak da gösterebiliriz. Şimdi,

$$f_0 = 1111111....$$
$$f_1 = 0111111...$$
$$f_2 = 0011111...$$
$$f_3 = 0001111...$$
$$\ldots$$

fonksiyonlarını alalım. Bunlar ilk n sayıda 0, daha sonra hep 1 değeri alan fonksiyonlar. Bu fonksiyonlar kümesi A olsun. A'nın en küçük elemanı yoktur. Çünkü tüm f_n'lerden küçük fonksiyonların en büyüğü hep 0 değerini alan 0000000... fonksiyonudur, bu da A'da değildir. Dolayısıyla bu sıralama bir iyisıralama olmuyor.

Ordinallerde üs almayı, toplama ve çarpmada olduğu gibi o kadar doğal bir biçimde tanımlayamayız. Bu uğraşa bir sonraki bölümde girişeceğiz ve üs almayı tümevarımla kanıtlayacağız.

$F(X, Y)$ kümesi üzerine yukarda tanımladığımız tamsıralama gene de ilginç bir sıralamadır. Bu sıralamayla ilgili bir iki alıştırmayla bitirelim bölümü.

Alıştırmalar

Y iyisıralı bir küme olsun.

15.1. $F(\omega, Y)$'nin boş olmayan her altkümesinin en büyük altsınırı olduğunu gösterin. Yani $\emptyset \neq A \subseteq F(\omega, Y)$ ise, öyle bir $f \in F(\omega, Y)$ vardır ki,

a. Her $a \in A$ için, $f \leq a$,

b. Eğer $g \in F(\omega, Y)$ "her $a \in A$ için, $g \leq a$" koşulunu sağlıyorsa o zaman $g \leq f$.

15.2. $F(\omega, Y)$'nin boş olmayan her altkümesinin en küçük üstsınırı her zaman var mıdır?

15.3. İlk alıştırmayı ω yerine iyisıralı bir X alarak yapın.

15.4. $f, g \in F(\omega, Y)$ olsun. Eğer $f \neq g$ ise, n, $f(n) \neq g(n)$ eşitsizliğini sağlayan en küçük doğal sayı olsun. $d(f, g) = 1/2^n$ olsun. $d(f, f) = 0$ olarak tanımlansın. Şunları gösterin:

a. $d(f, g) \geq 0$ ve, $d(f, g)$, ancak ve ancak $f = g$ ise 0 olabilir.

b. $d(f, g) = d(g, f)$.

c. $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$.

Dolayısıyla d, $F(\omega, Y)$ üzerine bir "mesafe"dir. d mesafesinin (c)'den daha güçlü bir özelliği vardır:

d. $d(f, g) \leq \max\{d(f, h), d(h, g)\}$.

16. Ordinallerde Üs Alma (Bir Başarı Öyküsü)

Ordinallerde toplama ve çarpmayı oldukça doğal bir biçimde tanımladıktan sonra, bir önceki bölümde üs almayı da aynı doğallıkta yapmaya çalıştık ama beceremedik. Bu bölümde ordinallerde üs almayı tümevarımla tanımlayacağız. Önceki bölümlerde şu sonuçları kanıtlamıştık.

Tümevarımla Ordinal Toplaması 13.11. *Ordinal toplaması, α ve β ordinalleri için,*

$$\alpha + 0 = \alpha,$$
$$\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$$

ve bir λ limit ordinali için,

$$\alpha + \lambda = \cup_{\beta<\lambda} (\alpha + \beta)$$

eşitlikleri tarafından belirlenmiştir.

Tümevarımla Ordinal Çarpması 14.12. *Ordinal çarpması,*

$$\alpha 0 = 0,$$
$$\alpha S(\beta) = \alpha\beta + \alpha,$$

ve bir λ limit ordinali için,

$$\alpha\gamma = \cup_{\beta<\lambda} \alpha\beta$$

eşitlikleri tarafından belirlenmiştir.

Ordinallerde üs almayı da bu yöntemle tümevarımla tanımlayacağız.

Tanım. α *ve* β *ordinal olsunlar.*

$$\alpha^0 = 1,$$
$$\alpha^{S(\beta)} = \alpha^\beta\alpha$$

olarak tanımlayalım. Eğer λ *limit ordinalse,*

$$\alpha^\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha^\beta$$

olsun.

Önsav 16.1. α *ve* β *birer ordinalse,* α^β *da ordinaldir.*

Kanıt: β üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. α'yı kanıt boyunca sabitliyoruz.

$\beta = 0$ ise, önermenin doğruluğu bariz.

Eğer önerme β için doğruysa $S(\beta)$ için de doğru olduğu çok belli, çünkü $\alpha^{S(\beta)} = \alpha^\beta\alpha$.

Şimdi λ bir limit ordinal olsun ve λ'dan küçük β ordinalleri için α^β'nın bir ordinal (dolayısıyla bir küme) olduğunu varsayalım. $\alpha^\gamma = \bigcup_{\beta<\lambda} \alpha^\beta$ olduğundan,

$$A(\lambda) = \{\alpha^\beta : \beta < \lambda\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlamak yeterlidir, çünkü herhangi bir ordinal kümesinin bileşiminin (hem bir küme hem de) bir ordinal olduğunu (Teorem 10.10) biliyoruz.

$A(\lambda)$ topluluğun bir küme olduğunu göstermek için Yerleştirme Aksiyomu'nu kullanacağız.

α ordinalini sabitleyelim. Her $\beta < \lambda$ ordinali için, α^β ordinalini β cinsinden ifade eden bir formül bulmalıyız. Yani öyle bir $\varphi(x, z)$ formülü bulmalıyız ki, eğer $\beta < \lambda$ ise, $\varphi(\beta, z)$ ancak $z = \alpha^\beta$ olduğunda doğru olsun.

$\varphi(\beta, z)$ formülü şunları desin: β bir ordinaldir ve öyle bir A ordinaller kümesi ve bir $f : \beta +1 \to A$ eşlemesi vardır ki,

a) $f(0) = 1$ ve

b) her γ için eğer $\gamma \in \beta$ ise, $f(\gamma+1) = f(\gamma)\alpha$ ve

c) her limit $\lambda \in \beta+1$ için, $f(\lambda) = \bigcup_{\gamma<\lambda} f(\gamma)$ ve

d) $z = f(\beta)$.

Buradaki A ordinaller kümesinin (eğer varsa)

$$\{\alpha^\gamma : \gamma \leq \beta\}$$

olması gerektiği ve f fonksiyonunun $f(\gamma) = \alpha^\gamma$ kuralıyla verilmesi gerektiği belli. Tek yapmamız gereken, $\beta < \lambda$ için,

$$\{\alpha^\gamma : \gamma \leq \beta\}$$

topluluğunun bir küme olduğunu göstermek. Bunun için, elbette $A(\beta)$'nın bir küme olduğunu göstermek yeterli.

Şimdi kanıtın ta en başına dönelim ve "α *ve* β *ordinallerse*, α^β *da ordinaldir*" önermesi yerine "α *ve* β *ordinallerse*, α^β *da ordinaldir* ***ve*** $A(\beta)$ *bir kümedir*" önermesini aynen yukarda yaptığımız gibi kanıtlayalım. Ayrıntıları (eğer kalmışsa!) okura bırakıyoruz. □

α^β ordinaline "α ***üssü*** β" denir.

0^0'ın 1 olarak tanımlandığına dikkatinizi çekerim.

16.3. Temel Özellikler

Tahmin edilen ilk eşitlik gerçekten doğru:

$$\alpha^1 = \alpha^{S(0)} = \alpha^0\alpha = 1\alpha = \alpha.$$

İkinci eşitlik de:

$$\alpha^2 = \alpha^{S(1)} = \alpha^1\alpha = \alpha\alpha.$$

Her şey bu kadar doğal seyretmiyor ama; örneğin

$$2^\omega = \bigcup_{n<\omega} 2^n = \omega.$$

Teorem 16.2. *Eğer* $1 < \alpha$ *ise* $\beta < \gamma$ *ancak ve ancak* $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

Kanıt: $\beta < \gamma$ varsayımını yapalım. Sonucu γ üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $\gamma = 1$ ise, $\beta = 0$ olmalı. O zaman da $\alpha^\beta = \alpha^0 = 1 < \alpha = \alpha^1 = \alpha^\gamma$ olur.

Önsavın γ ve γ'dan küçük ordinaller için doğru olduğunu varsayıp, $\gamma + 1$ için kanıtlayalım. $\beta < \gamma + 1$ olsun. Eğer $\beta < \gamma$ ise o zaman tümevarımla $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$. Eğer $\beta = \gamma$ ise o zaman $\alpha^\beta = \alpha^\gamma$. De-

mek ki her iki durumda da $\alpha^\beta \le \alpha^\gamma$. Ama Önsav 14.5'e göre
$$\alpha^\beta \le \alpha^\gamma = \alpha^\gamma 1 < \alpha^\gamma\alpha = \alpha^{\gamma+1}.$$
Şimdi λ bir limit ordinal olsun. λ'dan küçük ordinaller için önsavın doğru olduğunu varsayalım. $\beta < \lambda$ olsun. Tanımdan dolayı $\alpha^\beta \subseteq \alpha^\lambda$. Demek ki $\alpha^\beta \le \alpha^\lambda$. Ama λ limit olduğundan, $\beta + 1 < \lambda$ ve gene $\alpha^{\beta+1} \le \alpha^\lambda$. Öte yandan Önsav 14.5'e göre $\alpha^\beta < \alpha^{\beta+1}$. Demek ki $\alpha^\beta < \alpha^{\beta+1} \le \alpha^\lambda$.

Şimdi $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$ varsayımını yapalım. Eğer $\beta \ge \gamma$ olsaydı, birinci kısma göre $\alpha^\beta \ge \alpha^\gamma$ olurdu, çelişki. Demek ki $\beta < \gamma$. □

Sonraki teoremler için teknik bir sonuca ihtiyacımız var:

Önsav 16.3. α *bir ordinal olsun.*

i. λ *bir limit ordinal ve* $B \subseteq \lambda$, λ*'da kofinal bir altkümeyse,* $\{\alpha^\beta : \beta \in B\}$ *kümesi* α^λ*'da kofinaldir.*

ii. *B bir ordinal kümesiyse* $\bigcup_{\beta \in B} \alpha^\beta = \alpha^{\bigcup_{\beta\in B}\beta}$.

Kanıt: i. $\delta \in \alpha^\lambda$ olsun. $\alpha^\lambda = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^\gamma$ olduğundan, bir $\gamma < \lambda$ için $\delta \in \alpha^\lambda$ olur. B, λ'da kofinal olduğundan, bir $\beta \in B$ için $\gamma \le \beta$ olur. Demek ki, Teorem 16.2'ye $\delta \in \alpha^\lambda \subseteq \alpha^\beta$ olur, yani $\delta < \alpha^\beta$.

ii. Teorem 16.2'ye göre her $\beta \in B$ için $\alpha^\beta \subseteq \alpha^{\bigcup_{\beta\in B}\beta}$. Aynı teorem, eğer B'nin en büyük elemanı varsa eşitliği verir. B'nin en büyük elemanının olmadığını varsayıp ters içindeliği kanıtlayalım. Bu durumda, $\bigcup_{\beta\in B} \beta = \lambda$ bir limit ordinaldir (Alıştırma 11.4) ve B bu limit ordinalde kofinaldir (bkz. Bölüm 13.7). Birinci kısma göre
$$\bigcup_{\beta\in B} \alpha^\beta = \alpha^\lambda = \alpha^{\bigcup_{\beta\in B}\beta}.$$ □

Teorem 16.4. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta\alpha^\gamma$.

Kanıt: γ üzerine tümevarımla. $\gamma = 0$ için:
$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta+0} = \alpha^\beta = \alpha^\beta 1 = \alpha^\beta\alpha^0 = \alpha^\beta\alpha^\gamma.$$
Teoremi γ için doğru olduğunu varsayıp, eşitliği $\gamma + 1$ için kanıtlayalım:
$$\alpha^{\beta+(\gamma+1)} = \alpha^{(\beta+\gamma)+1} = \alpha^{\beta+\gamma}\alpha = (\alpha^\beta\alpha^\gamma)\alpha = \alpha^\beta(\alpha^\gamma\alpha) = \alpha^\beta\alpha^{\gamma+1}.$$

Son olarak λ bir limit ordinal olsun. Teoremdeki eşitliğin λ'dan küçük ordinaller için doğru olduğunu varsayıp λ için kanıtlayalım. $\beta + \lambda$'nın da bir limit ordinal olduğunu ve
$$\alpha^{\beta+\lambda} = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^{\beta+\gamma}$$
eşitliğini Önsav 16.3.ii'den biliyoruz. Demek ki,
$$\alpha^{\beta+\lambda} = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^{\beta+\gamma} = \bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta}\bigcup_{\gamma<\lambda} \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta}\alpha^{\lambda}.$$
Son eşitlikte Önsav 14.8'i kullandık. □

Teorem 16.5. $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\gamma}$.

Kanıt: γ üzerine tümevarımla.

Eğer $\gamma = 0$ ise, $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = (\alpha^{\beta})^{0} = 1$ ve $\alpha^{\beta\gamma} = \alpha^{\beta 0} = \alpha^{0} = 1$.

Eğer eşitlik γ için doğruysa,
$$(\alpha^{\beta})^{\gamma+1} = (\alpha^{\beta})^{\gamma}\alpha^{\beta} = \alpha^{\beta\gamma}\alpha^{\beta} = \alpha^{\beta\gamma+\beta} = \alpha^{\beta(\gamma+1)}.$$
Eğer γ limit ordinalse ve teorem γ'dan küçük δ ordinalleri için doğruysa,
$$(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \bigcup_{\delta<\gamma} (\alpha^{\beta})^{\delta} = \bigcup_{\delta<\gamma} \alpha^{\beta\delta}.$$
Alıştırma 14.5'e göre $\beta\gamma$ bir limit ordinaldir ve
$$\{\beta\delta : \delta < \gamma\}$$
kümesi $\beta\gamma$'da kofinaldir. Önsav 16.3.i'e göre
$$\{\alpha^{\beta\delta} : \beta \in B\}$$
kümesi $\alpha^{\beta\gamma}$'da kofinaldir. Gene Önsav 16.3.i'e göre
$$\bigcup_{\delta<\gamma} \alpha^{\beta\delta} = \alpha^{\beta\gamma}.$$
□

Son olarak, toplama işlemini çok kolaylaştıracak ve
$$1 + \omega = \omega$$
eşitliğini genelleştiren bir eşitlik kanıtlayalım.

Teorem 16.5. *Eğer* $\beta < \alpha$ *ise*, $\omega^{\beta} + \omega^{\alpha} = \omega^{\alpha}$.

Kanıt: $\alpha = \beta + \gamma$ eşitliğini sağlayan bir $\gamma > 0$ vardır. Demek ki,
$$\begin{aligned}\omega^{\beta} + \omega^{\alpha} &= \omega^{\beta} + \omega^{\beta+\gamma} = \omega^{\beta} + \omega^{\beta}\omega^{\gamma}\\ &= \omega^{\beta}(1 + \omega^{\gamma}) = \omega^{\beta}\omega^{\gamma} = \omega^{\beta+\gamma} = \omega^{\alpha}.\end{aligned}$$
İstediğimiz kanıtlanmıştır. □

Sonuç 16.6. *Eğer* $\beta < \alpha$ *ve* $\omega^\alpha < \gamma$ *ise* $\omega^\beta + \gamma = \gamma$.

Kanıt: δ ordinali $\gamma = \omega^\alpha + \delta$ eşitliğini sağlasın. O zaman,

$$\omega^\beta + \gamma = \omega^\beta + \omega^\alpha + \delta = \omega^\alpha + \delta = \gamma$$

olur. □

17. Ordinallerin Cantor Normal Biçimi

Bilindiği gibi, sayıları genelde,

$$3546 = 3\times10^3 + 5\times10^2 + 2\times10^1 + 6\times10^0$$

gibi onluk tabanda yazarız. Aynı sayıyı başka tabanlarda da yazabiliriz. Örneğin 11 tabanında,

$$3546 = 2\times11^3 + 7\times11^2 + 3\times11^1 + 4\times11^0$$

dır. Aynı şeyi 10 ya da 11 yerine herhangi bir $p > 1$ doğal sayısı için de yapabiliriz: Her n doğal sayısı, her

$$a_0, ..., a_k \in \{0, 1, ..., p-1\}, a_k \neq 0$$

için,

$$n = a_k p^k + \cdots + a_0 p^0$$

toplamı biçiminde tek bir biçimde yazılır. Buna n'nin ***p tabanında yazılımı*** adı verilir.

On parmağımız olduğundan 10 tabanı önemlidir. Bilgisayarlar sayesinde 2 tabanı da önemlidir. Saat ve dereceler de 60 tabanına belli bir önem kazandırır.

Bu bölümde benzer şeyi ordinaller için yapacağız, p doğal sayısı yerine herhangi bir $\alpha > 1$ ordinali alacağız ve her β ordinalinin "α'lık tabanda" tek bir biçimde yazabileceğini göreceğiz. İşte teorem:

Teorem 17.1. $1 < \alpha$ *ve* $0 < \beta$ *iki ordinal olsun. O zaman,*
- *bir* k *doğal sayısı,*
- $\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_k$ *ve*
- $0 < \delta_i < \alpha$ $(1 \leq i \leq k)$ *ordinalleri için,* β *ordinali*

$$\beta = \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \alpha^{\gamma_2}\delta_2 + \cdots + \alpha^{\gamma_k}\delta_k$$

olarak yazılır. Ayrıca bu koşulları sağlayan k, γ_i ve δ_i $(1 \leq i \leq k)$ *biriciktir.*

Teoremi, α'yı sabit tutup β üzerine tümevarımla kanıtlayacağız.

Önsav 17.2. *Eğer* $1 < \alpha$, $\gamma_1 > \ldots > \gamma_k$ *ve* $0 < \delta_i < \alpha$ *ise, o zaman*

$$\alpha^{\gamma_1} \leq \alpha^{\gamma_1}\delta_1 \leq \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \cdots + \alpha^{\gamma_k}\delta_k < \alpha^{\gamma_1}(\delta_1 + 1) \leq \alpha^{\gamma_1+1}.$$

Kanıt: İlk iki eşitsizlik ve sonuncusu bu aşamada kolay olmalı. Üçüncüsü olan

$$\alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \cdots + \alpha^{\gamma_k}\delta_k < \alpha^{\gamma_1}(\delta_1 + 1)$$

eşitsizliğini k üzerine tümevarımla kanıtlayalım.

Eğer $k = 1$ ise $\alpha^{\gamma_1}\delta_1 < \alpha^{\gamma_1}(\delta_1 + 1)$ eşitsizliği kanıtlanmalı ki bu da bariz.

Şimdi $k > 1$ olsun. Önceki bölümlerde kanıtladığımız sonuçları kullanarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \alpha^{\gamma_2}\delta_2 + \cdots + \alpha^{\gamma_k}\delta_k &= \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + (\alpha^{\gamma_2}\delta_2 + \cdots + \alpha^{\gamma_k}\delta_k)\\ &< \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \alpha^{\gamma_2+1} \leq \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \alpha^{\gamma_1} = \alpha^{\gamma_1}(\delta_1 + 1).\end{aligned}$$ □

Sonuç 17.3. *Eğer* β *ordinali teoremdeki gibi yazılırsa, o zaman* γ_1, $\alpha^\gamma \leq \beta$ *eşitsizliğini sağlayan en büyük* γ *ordinalidir ve* δ_1, $\alpha^\gamma\delta \leq \beta$ *eşitsizliğini sağlayan en büyük* δ *ordinalidir.*

Eğer teorem doğruysa, γ_1 ve δ_1 yukardaki sonuçtaki gibi olmak zorunda olduklarından, bu özelliği sağlayan γ_1 ve δ_1 ordinallerinin varlıklarını kanıtlamalıyız:

Önsav 17.4. $1 < \alpha$ *ve* $0 < \beta$ *iki ordinal olsun. O zaman* $\alpha^\gamma \le \beta$ *eşitsizliğini sağlayan en büyük bir* γ *ordinali ve* $\alpha^\gamma\delta \le \beta$ *eşitsizliğini sağlayan en büyük bir* δ *ordinali vardır.*

Kanıt: $\alpha^\gamma \le \beta$ eşitsizliğini sağlayan tüm γ ordinallerin topluluğu bir küme olduğundan (okura alıştırma), bu ordinallerin bileşimi de bir ordinaldir (Teorem 10.10) ve aynı eşitsizliği sağlar (Önsav 16.3.ii); dolayısıyla bu bileşim

$$\alpha^\gamma \le \beta$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük γ ordinalidir.

$$\alpha^\gamma\delta \le \beta$$

eşitsizliğini sağlayan tüm δ ordinaller topluluğu da bir küme olduğundan (okura alıştırma), bu ordinallerin bileşimi de bir ordinaldir ve aynı eşitsizliği sağlar (Önsav 14.8), dolayısıyla bu bileşim

$$\alpha^\gamma\delta \le \beta$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük δ ordinalidir. □

Teorem 17.1'in Kanıtı: Artık teoremi kolaylıkla kanıtlayabiliriz. α ve β teoremde söylendiği gibi olsun. γ_1 ve δ_1 yukardaki önsavdaki gibi olsun. β_1,

$$\beta = \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \beta_1$$

eşitliğini sağlayan biricik ordinal olsun. Elbette $\beta_1 < \alpha^{\gamma_1}$, çünkü aksi takdirde

$$\beta = \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \beta_1 \ge \alpha^{\gamma_1}\delta_1 + \alpha^{\gamma_1} = \alpha^{\gamma_1}(\delta_1 + 1);$$

ama δ, $\alpha^\gamma\delta \le \beta$ eşitsizliğini sağlayan en büyük ordinaldi, çelişki. Demek ki $\beta_1 < \alpha^{\gamma_1} \le \beta$. Şimdi tümevarımla teoremdeki koşulları sağlayan endisli γ ve δ ordinalleri için,

$$\beta_1 = \alpha^{\gamma_2}\delta_2 + \cdots + \alpha^{\gamma_k}\delta_k.$$

Önsav 17.2'den dolayı, $\alpha^{\gamma_2} \le \beta_1 < \alpha^{\gamma_2+1} < \alpha^{\gamma_1}$ ve Teorem 16.2'ye göre $\gamma_2 < \gamma_1$. □

$\alpha = \omega$ ise δ'lar doğal sayı olmak zorunda olduklarından, bu sonuç $\alpha = \omega$ için daha dikkat çekicidir:

Teorem 17.5 [Ordinallerin Cantor Normal Biçimi]. $0 < \beta$ *bir ordinal olsun. O zaman,*

- *bir k doğal sayısı,*
- $\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_k$ *ordinalleri ve*
- $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *pozitif doğal sayıları için,*

$$\beta = \omega^{\gamma_1}n_1 + \omega^{\gamma_2}n_2 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k$$

olarak yazılır. Ayrıca bu koşulları sağlayan k, γ_i ve n_i $(1 \le i \le k)$ *biriciktir.*

Aynı olguyu şöyle de söyleyebiliriz:

Teorem 17.5′ [Ordinallerin Cantor Normal Biçimi]. $0 < \beta$ *bir ordinal olsun. O zaman,*

- *bir k doğal sayısı,*
- $\gamma_1 \ge \gamma_2 \ge \ldots \ge \gamma_k$ *ordinalleri için,*

$$\beta = \omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \cdots + \omega^{\gamma_k}$$

olarak yazılır. Ayrıca bu koşulları sağlayan k ve γ_i $(1 \le i \le k)$ *biriciktir.*

Ordinalleri Cantor normal biçimiyle toplayıp çarpmak oldukça pratiktir. Yazının geri kalan bölümünde bu pratiği öğreneceğiz. Önce toplamanın üstesinden gelelim. Teoremlerimizi ω tabanı için kanıtlayacağız.

17.1. Toplama

Teorem 17.6. $\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_k$ *ve* $\delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_\ell$ *ordinal olsunlar.* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *ve* $m_1, m_2, \ldots, m_\ell$ *pozitif doğal sayı olsunlar. O zaman, eğer* i, $\gamma_i \ge \delta_1$ *eşitsizliğini sağlayan en büyük göstergeç (endis) ise*

$$(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k) + (\omega^{\delta_1}m_1 + \cdots + \omega^{\delta_\ell}m_\ell)$$
$$= \omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_i}n_i + \omega^{\delta_1}m_1 + \cdots + \omega^{\delta_\ell}m_\ell$$

olur.

Kanıt: Eğer $\gamma < \delta$ ise $\omega^\gamma n + \omega^\delta m = \omega^\delta m$ eşitliğini kanıtlamak yeterli. $\gamma < \delta$ olsun. Teorem 16.2'den dolayı $\omega^\gamma < \omega^\delta$. Teorem 16.5'ten dolayı, $\omega^\gamma + \omega^\delta = \omega^\delta$'dir. n ile çarpma n kez toplama olduğundan kanıt bitmiştir! □

Demek ki $\alpha + \beta$ toplamını bulmak için α ve β'yı Cantor normal biçiminde yazıp α'nın kuyruğundaki küçük terimleri atıp β'yı bu kısaltılmış α'nın sonuna olduğu gibi eklemeli.

17.2. Çarpma

Şimdi çarpmaya gelelim. Çarpma toplama kadar kolay değil, ama çok da zor değil.

$$\alpha = \omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k$$

ve

$$\beta = \omega^{\delta_1} m_1 + \cdots + \omega^{\delta_\ell} m_\ell$$

çarpmak istediğimiz ve Cantor normal biçimde yazılmış iki ordinal olsun. Cantor normal biçimde yazılmış ordinalleri toplamayı bildiğimizden ve soldan dağılmadan dolayı (Önsav 14.2),

$$(\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^\delta m$$

çarpımını bilmemiz yeterli. Hatta $m = 1$ bile alabiliriz. Demek ki,

$$(\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^\delta$$

çarpımını bulmalıyız. $\delta = 0$ ise çarpımın ne olması gerektiği belli. $\delta > 0$ durumuna yoğunlaşmalıyız. Önsav 17.2'den dolayı,

$$\begin{aligned} \omega^{\gamma_1+\delta} &= \omega^{\gamma_1}\omega^\delta \le (\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^\delta \\ &\le \omega^{\gamma_1+1}\omega^\delta = \omega^{(\gamma_1+1)+\delta} = \omega^{\gamma_1+(1+\delta)}, \end{aligned}$$

yani

$$\omega^{\gamma_1+\delta} \le (\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^\delta \le \omega^{\gamma_1+(1+\delta)}.$$

Demek ki, eğer δ sonsuzsa, $1 + \delta = \delta$ olacağından,

$$\omega^{\gamma_1+\delta} \le (\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^\delta \le \omega^{\gamma_1+(1+\delta)} = \omega^{\gamma_1+\delta}$$

ve dolayısıyla

$$(\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^\delta = \omega^{\gamma_1+\delta}.$$

Ya $\delta = m \in \omega$ ise

$$(\omega^{\gamma_1} n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k} n_k)\omega^m$$

çarpımı nedir? $m = 0$ ise çarpımın ne olacağı belli. Bundan böyle $m > 0$ olsun. Elbette sağdan ω^m ile bir defa çarpmak yerine sağdan ω ile m defa çarpmak yeterli. Demek ki

$$(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\omega$$

çarpımını bulmalıyız.

$$(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\omega = \bigcup_{r\in\omega}(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)r$$

eşitliğinden dolayı,

$$(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)r$$

çarpımını bulmalıyız. Ama bu,

$$\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k$$

sayısını kendisiyle r kez toplamak demek ve Cantor normal biçiminde yazılmış ordinalleri toplamayı bir önceki teoremden biliyoruz. Örneğin,

$$\begin{aligned}(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k) &+ (\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\\ &= \omega^{\gamma_1}n_1 + \omega^{\gamma_1}n_1 + \omega^{\gamma_2}n_2 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k\\ &= \omega^{\gamma_1}2n_1 + \omega^{\gamma_2}n_2 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k.\end{aligned}$$

Buradan kolayca görüleceği üzere,

$$(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)r = \omega^{\gamma_1}rn_1 + \omega^{\gamma_2}n_2 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k.$$

Demek ki

$$\begin{aligned}(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\omega &= \bigcup_{r\in\omega}(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)r\\ &= \bigcup_{r\in\omega}(\omega^{\gamma_1}rn_1 + \omega^{\gamma_2}n_2 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\\ &\le \bigcup_{r\in\omega}\omega^{\gamma_1}(rn_1 + 1) = \omega^{\gamma_1+1}.\end{aligned}$$

Öte yandan, r sonsuza gittiğinde, rn_1 de sonsuza gittiğinden, r'yi yeterince büyük alırsak, rn_1 her s doğal sayısını aşacağından,

$$\begin{aligned}\omega^{\gamma_1+1} = \omega^{\gamma_1}\omega = \bigcup_{s\in\omega}\omega^{\gamma_1}s &\le \bigcup_{r\in\omega}\omega^{\gamma_1}rn_1\\ &\le \bigcup_{r\in\omega}(\omega^{\gamma_1}rn_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\\ &= (\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\omega.\end{aligned}$$

Sonuçta, $(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\omega = \omega^{\gamma_1+1}$. Demek ki,

$$(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\omega^m = \omega^{\gamma_1+m},$$

ve $\delta > 0$ sonlu da olsa sonsuz da olsa,

$$(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\omega^\delta = \alpha^{\gamma_1+\delta}.$$

Bulduklarımızı toparlayalım:

Teorem 17.8. *$\gamma_1 > ... > \gamma_k$ ve $\delta > 0$ ordinal olsunlar. r bir doğal sayı olsun. O zaman,*

$$(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)\omega^{\delta} = \omega^{\gamma_1+\delta}$$

ve

$$(\omega^{\gamma_1}n_1 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k)r = \omega^{\gamma_1}rn_1 + \omega^{\gamma_2}n_2 + \cdots + \omega^{\gamma_k}n_k$$

olur.

Bu teorem sayesinde Cantor normal biçiminde yazılmış herhangi iki ordinali kolaylıkla çarpabiliriz. Örneğin,

$$\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7$$

ile

$$\omega^{\omega^{\omega^2}}8 + \omega^{\omega^{\omega}}8 + \omega^{\omega^3+\omega}5 + \omega^4 3 + \omega + 3$$

ordinallerinin çarpımı için, sırasıyla

$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega^{\omega^{\omega^2}}$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega^{\omega^{\omega}}8$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega^{\omega^3+\omega}5$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega^4 3$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)3$$

çarpımlarını bulup bu sırayla toplamalıyız. Başlayalım

$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega^{\omega^{\omega^2}} = \omega^{\omega^{\omega}2+\omega^{\omega^2}} = \omega^{\omega^{\omega^2}}$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega^{\omega^{\omega}}8 = \omega^{\omega^{\omega}2+\omega^{\omega}}8 = \omega^{\omega^{\omega}3}8$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega^{\omega^3+\omega}5 = \omega^{\omega^{\omega}2+\omega^3+\omega}5$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega^{\omega^3+1} = \omega^{\omega^{\omega}2+\omega^3+1}$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega^4 3 = \omega^{\omega^{\omega}2+4}3$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)\omega = \omega^{\omega^{\omega}2+1}$$
$$(\omega^{\omega^{\omega}2}4 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7)3 = \omega^{\omega^{\omega}2}12 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7.$$

Çarpım bu ordinallerin bu sırayla toplanmasıyla çıkar. İşte sonuç:

$$\omega^{\omega^{\omega^2}} + \omega^{\omega^{\omega}3}8 + \omega^{\omega^{\omega}2+\omega^3+\omega}5 + \omega^{\omega^{\omega}2+\omega^3+1} + \omega^{\omega^{\omega}2+4}3 + \omega^{\omega^{\omega}2+1} + \omega^{\omega^{\omega}2}12 + \omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega^3}2 + \omega^4 + \omega^2 3 + 7.$$

Ordinal Sınavı

1. Her α ordinali için, $1^\alpha = 1$ eşitliğini gösterin.

2. $(\alpha\beta)^\gamma = \alpha^\gamma\beta^\gamma$ eşitliği her zaman geçerli mi?

3. Her n, $m \in \omega$ için $\omega^n\omega^m = \omega^m\omega^n$ eşitliği doğru mudur?

4. $\alpha > 0$ için $\omega^\alpha\omega^\beta = \omega^\beta$ olabilir mi?

5. Eğer $1 < \alpha$ ve $\alpha^\beta = \alpha^\gamma$ ise $\beta = \gamma$ eşitliğini kanıtlayın.

6. $2^\omega = 3^\omega = \omega$ eşitliğini kanıtlayın.

7. $\alpha > 1$ ise $\alpha^\beta \geq \beta$ eşitsizliğini kanıtlayın.

8. $\alpha > 1$ ise $\alpha^{\beta+1} > \beta$ eşitsizliğini kanıtlayın. Öte yandan $\alpha^\beta > \beta$ eşitsizliğinin $\alpha = \omega$ ve $\beta = \varepsilon_0$ için yanlış olduğunu kanıtlayın.

9. $\alpha > 1$ bir ordinal olsun. $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$ ise $\beta < \gamma$ eşitsizliğini kanıtlayın. ($\alpha^\beta \leq \alpha^\gamma$ ise $\beta \leq \gamma$ eşitsizliğini kanıtlamak yeterli. β üzerinden tümevarım yapın.)

10. $\alpha_0 = \omega$, $\alpha_{n+1} = \omega^{\alpha_n}$ olsun. Örneğin,

$$\alpha_1 = \omega^{\alpha_0} = \omega^\omega,\ \alpha_2 = \omega^{\alpha_1} = \omega^{\omega^\omega},\ \alpha_3 = \omega^{\alpha_2} = \omega^{\omega^{\omega^\omega}}.$$

10a. $\{\alpha_n : n \in \omega\}$ topluluğunun bir küme olduğunu kanıtlayın. (Yerleştirme Aksiyomu'nu kullanmalısınız.)

10b. $\varepsilon_0 = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n$ olsun. $\omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0$ eşitliğini kanıtlayın.

10c. Eğer $\omega^\varepsilon = \varepsilon$ ise $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ eşitsizliğini kanıtlayın.

10d. ε_0'ın ω'dan büyük ve toplama, çarpma ve üs alma altında kapalı en küçük ordinal olduğunu kanıtlayın.

11. $(\omega + 1)^2$ ve $(\omega + 1)^3$ ordinallerini ω cinsinden bir "polinom" olarak yazın. Aynı şeyi $(\omega + 1)^n$ için yapın.

12. $(\omega+1)^n$ ordinalini Cantor normal biçimde yazın.

13. $(\omega+1)^\omega = \omega^\omega$ eşitliğini kanıtlayın.

14. $\omega^{\omega^{\omega 2}2}3 + \omega^{\omega^{\omega+1}}3 + \omega^{\omega^3}2 + \omega^2 + \omega 3 + 4$ ile

$$\omega^{\omega^{\omega^2}}5 + \omega^{\omega^{\omega+1}}2 + \omega^{\omega^\omega} + \omega^{\omega^3+\omega}2 + \omega^4 + \omega^2 + 1$$

ordinallerini toplayın ve çarpın ve sonucu Cantor normal formda yazın.