Aksiyomatik Kümeler Kuramı (MAT 340)

David Pierce

30 Mayıs 2013 (final)

Problem 1. (a) İki ordinalin çarpımını tanımlayın.

(b) Hangi ordinaller, kardinaldir? (Yani kardinallerin tanımı, nedir?)

(c) İki kardinalin çarpımını tanımlayın.

Çözüm. (a)
$$\alpha \cdot 0 = 0,$$
$$\alpha \cdot \beta' = \alpha \cdot \beta + \alpha,$$
$$\gamma \text{ limit ise } \alpha \cdot \gamma = \sup_{\xi<\gamma}(\alpha \cdot \xi).$$

(b) Bir κ ordinali bir kardinaldir ancak ve ancak tüm α ordinali için
$$\kappa \approx \alpha \Rightarrow \kappa \leqslant \alpha.$$

(c) $\kappa \otimes \lambda = \mathrm{kard}(\kappa \times \lambda)$.

Problem 2. Tümevarım ile tüm α ordinali için

$$1 \cdot \alpha = \alpha$$

eşitliğini kanıtlayın.

Çözüm.

1. Tanımdan $1 \cdot 0 = 0$.
2. $1 \cdot \beta = \beta$ ise $1 \cdot \beta' = 1 \cdot \beta + 1 = \beta + 1 = \beta'$.
3. γ limit olsun. Eğer $\beta < \gamma \Rightarrow 1 \cdot \beta = \beta$ ise

$$1 \cdot \gamma = \sup_{\xi < \gamma}(1 \cdot \xi) = \sup_{\xi < \gamma} \xi = \gamma.$$

Problem 3. Aşağıdaki ordinallerin Cantor normal biçimlerini verin.

(a) $\omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega} + \omega + 1 + \omega^{\omega} + \omega + 1$

(b) $(\omega^{\omega} + \omega + 1) \cdot 5$

(c) $(\omega^{\omega} + \omega + 1) \cdot \omega$

(d) $5 \cdot (\omega^{\omega} + \omega + 1)$

(e) $\omega \cdot (\omega^{\omega} + \omega + 1)$

(f) $(\omega^{\omega} + \omega + 1)^{\omega}$

Çözüm.

(a) $\omega^{\omega^{\omega}} + \omega^{\omega} \cdot 2 + \omega + 1$

(b) $\omega^{\omega} \cdot 5 + \omega + 1$

(c) $\omega^{\omega+1}$

(d) $\omega^{\omega} + \omega + 5$

(e) $\omega^{\omega} + \omega^{2} + \omega$

(f) $\omega^{\omega^{2}}$

Problem 4. Aşağıdaki denklemleri sağlayan ξ ordinallerini bulun.

(a) $\aleph_1 \oplus \aleph_\xi = \aleph_3$

(b) $\aleph_\xi \otimes \aleph_\omega = \aleph_\omega$

(c) $(\aleph_\omega \oplus \aleph_{\omega^2}) \otimes \aleph_{\omega\cdot 3} = \aleph_\xi$

(d) $(\aleph_\alpha)^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\xi}$ (kardinal kuvvetler)

(e) $\mathrm{kard}(\mathscr{P}(\aleph_{\omega+1})) = 2^{\aleph_\xi}$ (kardinal kuvvetler)

(f) $\mathrm{kard}(\omega^{\omega^\omega} + \omega^\omega + \omega + 75) = \aleph_\xi$

Çözüm.

(a) $\xi = 3$

(b) $\xi \leqslant \omega$

(c) $\xi = \omega^2$

(d) $\xi = \alpha$

(e) $\xi = \omega + 1$

(f) $\xi = 0$