Aksiyomatik Kümeler Kuramı (MAT 340)

David Pierce

12 Nisan 2013

Problem 1. a) Öyle bir $\varphi(x)$ formülü yazın ki

$$\varphi(a) \text{ doğrudur ancak ve ancak } a \text{ geçişlidir}$$

koşulu sağlansın.

b) Ordinal olmayan ama geçişli bir küme örneği yazın.

c) Ordinal olmayan ama en az üç elemanı olan ve içerilme tarafından iyi sıralanmış bir küme örneği yazın.

Çözüm. a) $\forall y\ (y \in x \Rightarrow y \subseteq x)$.

b) $\Big\{\{\{0\}\}, \{0\}, 0\Big\}$.

c) $\{1, 2, 3\}$.

Problem 2. a) Yerleştirme Aksiyomu ne diyor?

b) Yerleştirme ve Boş Küme Aksiyomlarını kullanarak Ayırma Aksiyomunu kanıtlayın.

Çözüm.

a) Her gönderme altında her kümenin görüntüsü, bir kümedir. Yani, her $\boldsymbol{F}$ göndermesi için, eğer a kümesi, $\boldsymbol{F}$ göndermesinin tanım sınıfı tarafından kapsanırsa, o zaman $\boldsymbol{F}[a]$ sınıfı, bir kümedir. Burada

$$\boldsymbol{F}[a] = \{\boldsymbol{F}(x) \colon x \in a\} = \{y \colon \exists x\ (x \in a \land \boldsymbol{F}(x) = y)\}.$$

b) $\boldsymbol{A} \subseteq b$ olsun. Eğer $\boldsymbol{A} = 0$ ise, o zaman Boş Küme Aksiyomuna göre $\boldsymbol{A}$ bir kümedir. $c \in \boldsymbol{A}$ olsun. O zaman

$$\{(x, x) \colon x \in \boldsymbol{A}\} \cup \{(x, c) \colon x \in b \smallsetminus \boldsymbol{A}\}$$

bağıntısı, b kümesinden aynı kümeye giden bir $\boldsymbol{F}$ göndermesidir, ve $\boldsymbol{F}[b] = \boldsymbol{A}$.

Problem 3.

a) Ordinaller üzerinde toplamanın tanımını verin.

b) Her α ordinali için $0 + \alpha = \alpha$ eşitliğini kanıtlayın.

Çözüm.

a)
$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha, \\ \alpha + \beta' &= (\alpha + \beta)', \\ \gamma \text{ limit} \implies \alpha + \gamma &= \sup_{\beta<\gamma}(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

b) Tümevarım kullanacağız.

i. Tanımdan $0 + 0 = 0$.

ii. $0 + \beta = \beta$ ise $0 + \beta' = (0 + \beta)' = \beta'$.

iii. γ limit ve bunun bütün β elemanları için $0 + \beta = \beta$ ise, o zaman

$$0 + \gamma = \sup_{\beta<\gamma}(0 + \beta) = \sup_{\beta<\gamma} \beta = \gamma.$$

Problem 4. Cevaplarınızı kısaca açıklayın:

a) Küme olmayan bir sınıf var mıdır?

b) Sınıf olmayan bir küme var mıdır?

Çözüm.

a) Var: Russell Paradoksuna göre $\{x \colon x \notin x\}$ sınıfı, küme değil.

b) Yok: Her a kümesi, $\{x \colon x \in a\}$ sınıfına eşittir.

Problem 5. Çözün:

a) $x + \omega + y = 15 + \omega + 16$.

b) $x \cdot \omega + y \cdot \omega = (x + y) \cdot \omega \wedge (x, y) \in \omega \times \omega$.

Çözüm.

a) $n \in \omega$ ise $n + \omega = \omega$, ama

$$\alpha \geqslant \omega \text{ ise } \alpha + \omega \geqslant \omega + \omega > \omega + n,$$

dolayısıyla denklemin çözüm kümesi, $\omega \times \{16\}$.

b) $0 < n < \omega$ ise $n \cdot \omega = \omega$, dolayısıyla çözüm kümesi,

$$(\omega \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \omega).$$