Analiz kısa sınavı 6 *ve çözümleri*

David Pierce, MSGSÜ

9 Nisan 2012

Soru 1. *Her Hausdorff topolojik uzayda, her tek noktalı kümenin kapalı olduğunu gösterin.*

Çözüm. (X, τ), Hausdorff topolojik bir uzay olsun, ve $a \in X$ olsun. (X, τ) Hausdorff olduğundan $X \smallsetminus \{a\}$ kümesinin her b elemanı için öyle a'nın U ve b'nin V komşulukları vardır ki

$$U \cap V = \varnothing.$$

O zaman $V \subseteq X \smallsetminus \{a\}$. Öyleyse $X \smallsetminus \{a\}$, b'nin komşuluğudur. Dolayısıyla $X \smallsetminus \{a\}$ açıktir, ve $\{a\}$, kapalıdır.

Soru 2. *Sonsuz bir topolojik uzayda, her tek noktalı küme kapalıysa, bu uzay Hausdorff olmalı mı?*

Çözüm. Hayır, olmayabilir. Uzayın topolojisi Fréchet topolojisiyse, her iki açık kümenin kesişimi boş değildir. Aslında uzay X olsun, ve U ile V, X'in açık altkümeleri olsun. O zaman

$$U \cap V = X \smallsetminus ((X \smallsetminus U) \cup (Y \smallsetminus V)),$$

ve bu küme boş değildir, çünkü $(X \smallsetminus U) \cup (Y \smallsetminus V)$ sonlu, ve X sonsuzdur.