Analiz kısa sınavı 5 *ve çözümleri*

David Pierce, MSGSÜ

19 Mart 2012

τ, $\mathbb{R}$ üzerinde Öklid topolojisi olsun ve $\sigma = \{U \in \mathscr{P}(\mathbb{R})\colon \exists\epsilon\ (\epsilon > 0 \land (-\epsilon, \epsilon) \subseteq U)\} \cup \{\emptyset\}$ olsun.

Uyarı. σ'nın boş olmayan elemanlar, 0'ın Öklid komşuluklarıdır. Her şey bundan çıkar.

Soru 1. *σ kümesinin $\mathbb{R}$ üzerinde bir topoloji olduğunu gösterin.*

Çözüm. Tanımdan $\emptyset \in \sigma$.

$(1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ olduğundan $\mathbb{R} \in \sigma$.

Bir noktanın sonlu sayıda komşuluğunun kesişimi de bu noktanın komşuluğudur.

Son olarak $\gamma \subseteq \sigma$ olsun. $\gamma \subseteq \{\emptyset\}$ ise $\bigcup\gamma = \emptyset \in \sigma$. γ'nın boş olmayan U elemanı varsa, 0'ın Öklid komşuluğudur. O halde $U \subseteq \bigcup\gamma$ olduğundan $\bigcup\gamma$ de 0'ın Öklid komşuluğudur.

Soru 2. *$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $f(0) = 0$ olsun. Aşağıdaki koşulların denk olduğunu gösterin.*

(i) f, $(\mathbb{R}, \tau)$ uzayından aynı uzaya giden bir fonksiyon olarak 0 *noktasında süreklidir.*

(ii) f, $(\mathbb{R}, \sigma)$ uzayından aynı uzaya giden bir fonksiyon olarak süreklidir.

Çözüm. Birinci koşul, 0'ın her V Öklid komşuluğu için, $f^{-1}[V]$ önimgesi de 0'ın komşuluğudur. Aynı zamanda bu ikinci koşuldur, çünkü 0'ın Öklid komşulukları, σ'nın boş olmayan elemanlarıdır.

Uyarı. Bu çözüm açık değilse, daha ayrıntılı bir kanıt yazılabilir:

Birinci koşul varsayılsın. İkinci koşulu kanıtlamak isteriz. O zaman $U \in \sigma$ olsun; $f^{-1}[U] \in \sigma$ içindeliğini kanıtlamak isteriz.

- $U = \emptyset$ ise, o zaman $f^{-1}[U] = \emptyset$ ve $f^{-1}[U] \in \sigma$.
- U boş değilse, τ'ya göre U, 0'ın komşuluğudur. O halde, birinci koşuldan $f^{-1}[U]$ da 0'ın komşuluğudur, yani, $f^{-1}[U] \in \sigma$.

Şimdi ikinci koşul varsayılsın. Birinci koşulu kanıtlamak isteriz. O zaman U, τ'ya göre 0'ın komşuluğu olsun. Bu durumda $U \in \sigma$. f'nin σ'ya göre sürekliliğinden $f^{-1}[U] \in \sigma$. Öyleyse $f^{-1}[U]$ da, τ'ya göre 0'ın komşuluğudur. Dolayısıyla f, τ'ya göre 0'da süreklidir.