Analiz ara sınavı 2, çözümleri

David Pierce, MSGSÜ

16 Mayıs 2012

Soru 1. *X, bir topolojik uzay, ve f ile g, X'ten $\mathbb{R}$'ye giden sürekli fonksiyondurlar. A, X'in $f(x) = g(x)$ eşitliğini sağlayan x noktaları kümesi olsun.*

a) A kapalı olabilir mi?
b) A kapalı olmalı mı?

Çözüm. A kapalı olabilir. Mesela f ile g, farklı sabit fonksiyonlar olabilir. O halde $A = \varnothing$ olur, ve $\varnothing$ kapalıdır.

Aslında A kapalı olmalı. Nitekim $b \in X \smallsetminus A$ olsun. O zaman $f(b) \neq g(b)$. $\mathbb{R}$ Hausdorff olduğundan $\mathbb{R}$'nin öyle açık U ile V altkümeleri vardır ki

$$U \cap V = \varnothing, \qquad f(b) \in U, \qquad g(b) \in V$$

olur. Bu durumda $b \in f^{-1}[U] \cap g^{-1}[V]$ ve $f^{-1}[U] \cap g^{-1}[V] \subseteq X \smallsetminus A$ olur; ayrıca $f^{-1}[U] \cap g^{-1}[V]$ açıktır, çünkü f ile g süreklidir. Öyleyse $X \smallsetminus A$, b'nin komşuluğudur. Yani $X \smallsetminus A$, her elemanının komşuluğudur. Dolayısıyla $X \smallsetminus A$ açıktır ve A kapalıdır.

Soru 2. *Bir topolojik uzayda, aşağıdaki denklemler her zaman doğru mudur?*

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}, \qquad \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i\in I} A_i}.$$

Çözüm. Hayır. Örneğin $\mathbb{R}$'de $A = (-1, 0)$ ve $B = (0, 1)$ olsun. O zaman

$$\overline{A} \cap \overline{B} = [-1, 0] \cap [0, 1] = \{0\}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{\varnothing} = \varnothing.$$

Uyarı. Birinci denklem, ikinci denklemin özel durumudur. Yani $|I| = 2$ olabilir. Öyleyse, birinci denklem her zaman doğru değilse, ikinci denklem de her zaman doğru değildir.

Soru 3. *Bir metrik uzayında, bir açık topun ikiden fazla merkezleri olabilir mi?*

Çözüm. Evet: ayrık metrikte, uzayının her a elemanı için, uzay $\mathrm{B}(a; 2)$ topudur.

Soru 4.

a) $\mathbb{R}$'nin sayılabilen sonsuz bağlantılı altkümesi var mıdır?
b) $\mathbb{R}$'nin sayılabilen sonsuz kopuk altkümesi var mıdır?

Çözüm. $\mathbb{R}$'nin her sayılabilen sonsuz altkümesi bağlantılı değildir, ama kopuktur, çünkü $\mathbb{R}$'nin her bağlantılı altkümesi ya tek noktalı ya da bir aralıktır, ve aralıklar sayılamazlar.

Soru 5.

a) $\mathbb{R}$'nin sayılabilen sonsuz tıkız altkümesi var mıdır?
b) $\mathbb{R}$'nin her sayılabilen sonsuz altkümesi tıkız mıdır?

Çözüm. $\{1/2^n : n \in \omega\} \cup \{0\}$ tıkızdır (çünkü kapalı ve sınırlıdır), ama $\mathbb{Z}$, tıkız değildir.