Analiz ara sınavı

David Pierce, MSGSÜ

28 Mart 2012

$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ olsun. $\mathbb{R}^2$ düzleminin topolojisi, Öklid topolojisi olsun.

- *τ, $\mathbb{N}$ üzerinde ayrık topoloji olsun (yani her altküme açık olsun).*
- *σ, $\mathbb{N}$ üzerinde Fréchet topolojisi olsun (yani açık kümeler, tümleyenleri sonlu olan kümeler olsun).*

Soru 1. *$\mathbb{R}^2 \smallsetminus f[\mathbb{N}]$ her zaman açık mıdır?*

Çözüm. Hayır. $f(n) = (1/n, 0)$ ise $\mathbb{R}^2 \smallsetminus f[\mathbb{N}]$ açık değildir (çünkü $(0,0) \in \mathbb{R}^2 \smallsetminus f[\mathbb{N}]$ ama bu küme, bu noktanın komşuluğu değildir).

Soru 2. *$\mathbb{R}^2 \smallsetminus f[\mathbb{N}]$ açık olabilir mi?*

Çözüm. Evet. $f(n) = (0,0)$ ise $\mathbb{R}^2 \smallsetminus f[\mathbb{N}]$ açıktır.

Uyarı. Bu soru için Alıştırma 4.17 faydalıdır.

Soru 3. *τ'ya göre f her zaman sürekli midir?*

Çözüm. Evet, çünkü τ'ya göre $f^{-1}[V]$ her zaman açıktır.

Soru 4. *τ'ya göre f sürekli olabilir mi?*

Çözüm. Evet; 3'e göre $n \mapsto (0,0)$ süreklidir (çünkü bu fonksiyon $\mathbb{N}$'den $\mathbb{R}^2$ düzlemine gider: bu yeter).

Soru 5. *σ'ya göre f her zaman sürekli midir?*

Çözüm. Hayır; σ'ya göre $n \mapsto (x, 0)$ sürekli değildir (çünkü bu fonksiyon altında $B((1,0),1)$ açık topunun önimgesi $\{1\}$'dir, ve bu küme ne boş ne tümleyeni sonlu olan kümedir).

Soru 6. *σ'ya göre f sürekli olabilir mi?*

Çözüm. Evet; $n \mapsto (0,0)$ süreklidir (çünkü her sabit fonksiyon süreklidir).

Uyarı. Her çözümde (x, y) ifadesi, aralık değil, $\mathbb{R}^2$ düzlemde noktadır.