Analitik Geometri Özeti

David Pierce

3 Nisan 2015, 10:49
Matematik Bölümü
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi
İstanbul
dpierce@msgsu.edu.tr
http://mat.msgsu.edu.tr/~dpierce/

İçindekiler

1 Denklik bağıntıları 3

2 Uzunluklar 5

3 Alanlar 7

4 Koni kesitleri ve paraboller 9

5 Hacimler 12

6 Hiperboller 13

7 İşaretli uzunluklar ve elipsler 15

8 Eksenler **18**

9 Dik eksenler **20**

10 Uzaklık **24**

11 Dik eksenlere göre koni kesitleri **27**

Şekil Listesi

1 Benzer dik üçgenler 5
2 Paralellik ve orantılılık 6
3 Dikdörtgenlerin eşitliği 7
4 Paralellik ve orantılılık 9
5 Koninin eksen üçgeni ve tabanı 10
6 Bir koni kesiti 10
7 Koninin eksen üçgeni ve tabanları 11
8 İki orta orantılı 12
9 Konide hiperbol 13
10 $2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$ hiperbolü 14
11 $2ay^2 = 2a\ell x - \ell x^2$ elipsi 17
12 Koordinatlar 19
13 İkinci dalı ile $2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$ hiperbolü 20
14 Parabolün yeni çapı 21
15 Hiperbolün yeni çapı 22
16 Hiperbolün benzer üçgenleri 23
17 Kosinüs tanımı 26
18 Kosinüs Teoremi 26
19 $y^2 = x - x^2/2a$ koni kesitleri 28
20 $x^2/4 \pm y^2 = 1$ koni kesitleri 29
21 Hiperbolün odakları ve doğrultmanları 30
22 Elipsin odakları ve doğrultmanları 31
23 Odak ve doğrultman 32

24 Dışmerkezlilik 33

1 Denklik bağıntıları

Tanım 1. Doğal sayılar, 1, 2, 3, ... Bunlar $\mathbb{N}$ kümesini oluşturur:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

(Bu ifadede = işareti *aynılığı* gösterir, yani $\mathbb{N}$ ve $\{1, 2, 3, \dots\}$ aynı kümedir.)

Söz 2. İlkokuldan bildiğimiz gibi iki doğal sayı toplanabilir ve çarpılabilir, ve doğal sayılar sıralanır.

Tanım 3. Sıralı ikililer,

$$(a, b) = (x, y) \iff a = x \ \& \ b = y$$

özelliğini sağlar. Tüm A ve B kümeleri için

$$A \times B = \{(x, y) \colon x \in A \ \& \ y \in B\}.$$

Tanım 4. Bir A kümesinin yansımalı, simetrik, ve geçişli iki-konumlu R bağıntısı, A kümesinin **denklik bağıntısıdır.** A kümesinin b elemanının R **bağıntısına göre denklik sınıfı** veya R**-sınıfı,**

$$\{x \in A \colon x \ R \ b\}$$

kümesidir.[1] Bu denklik sınıfı için

$$[b]$$

kısaltması kullanılabilir (ama Teorem 5'ten sonra kullanılmayacak).

[1] Bu kümeye "denklik sınıfı" demek, bir gelenektir. Kümeler kuramında her küme bir sınıftır, ama her sınıf küme değildir. Örneğin $\{x \colon x \notin x\}$ sınıfı, küme olamaz.

Teorem 5. *R, A kümesinin denklik bağıntısı olsun, ve $b \in A$, $c \in A$ olsun. Ya*

$$[b] = [c]$$

ya da

$$[b] \cap [c] = \varnothing.$$

Tanım 6. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin $\approx$ bağıntısı,

$$(k, \ell) \approx (x, y) \iff ky = \ell x$$

tanımını sağlasın.

Teorem 7. *$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin $\approx$ bağıntısı, denklik bağıntısıdır.*

Tanım 8. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ kümesinin (k, ℓ) elemanının $\approx$-sınıfı,

$$\frac{k}{\ell}$$

veya k/ℓ **pozitif kesirli sayısıdır.** Pozitif kesirli sayılar,

$$\mathbb{Q}^+$$

kümesini oluşturur.

Teorem 9. *Aşağıdaki eşitlikler, $\mathbb{Q}^+$ kümesinin toplama ve çarpma işlemleri için iyi tanımdır:*

$$\frac{k}{\ell} + \frac{m}{n} = \frac{kn + \ell m}{\ell n}, \qquad \frac{k}{\ell} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{\ell n}.$$

Yani

$$\frac{k}{\ell} = \frac{k'}{\ell'} \ \& \ \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \implies \frac{kn + \ell m}{\ell n} = \frac{k'n' + \ell' m'}{\ell' n'} \ \& \ \frac{km}{\ell n} = \frac{k'm'}{\ell' n'}.$$

Ayrıca $\mathbb{Q}^+$ aşağıdaki tanıma göre sıralanır:

$$\frac{k}{\ell} < \frac{m}{n} \iff kn < \ell m.$$

2 Uzunluklar

Tanım 10. Öklid'deki gibi bir **doğrunun** uç noktaları vardır, ve çakışan doğrular **eşittir.** (Özel olarak doğrular için eşitlik aynılık değildir.)

Teorem 11. *Doğruların eşitliği, denklik bağıntısıdır.*

Tanım 12. Doğrunun eşitlik sınıfı, doğrunun **uzunluğudur.** Küçük a, b, c, . . . Latin harfleri uzunluk gösterecek. Eğer bir AB doğrusunun uzunluğu c ise

$$AB = c$$

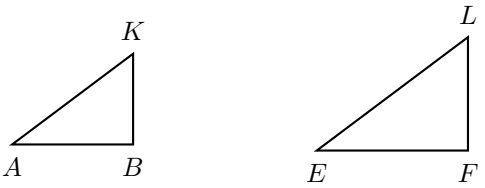
ifadesini yazarız.[2]

Teorem 13. *İki uzunluk toplanabilir, ve bir kesirli sayı bir uzunluğu çoğaltabilir. Toplama değişmeli ve birleşmelidir, ve çoğaltma toplama üzerine dağılır. Eğer $a < b$ ise*

$$a + x = b$$

denklemi çözülebilir.

Teorem 14. *Eğer $CD = BK$ ve $GH = FL$ ise, ve Şekil 1'deki gibi ABK ve EFL üçgenlerinde $\angle ABK$ ve $\angle EFL$ dik ve $\angle BAK = \angle FEL$*



Şekil 1: Benzer dik üçgenler

ise, o zaman

$$(AB, CD) \mathscr{R} (EF, GH)$$

[2]Bu uygulama Descartes'ın 1637 *Geometri* kitabından gelir.

olsun. Bu $\mathscr{R}$ bağıntısı, bir denklik bağıntısıdır. Ayrıca sadece doğruların uzunluğuna bağlıdır.

Tanım 15. Eğer Teorem 14'teki gibi $(AB, CD)\ \mathscr{R}\ (EF, GH)$ ise AB, CD, EF, ve GH doğruları **orantılıdır,** ve

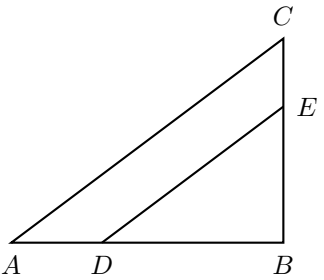
$$AB : CD :: EF : GH$$

orantısını yazarız; ayrıca $AB = a$, $CD = b$, $EF = c$, ve $GH = d$ ise

$$a : b :: c : d$$

ifadesini yazarız. Buradaki $AB : CD$ ve $a : b$ ifadeleri, (AB, CD) ve (a, b) sıralı ikililerinin denklik sınıfını gösterir; bu sınıf, bir **orandır.** Bu durumda :: simgesi, oranların *aynılığını* gösterir.

Teorem 16. *Şekil 2'de ABC açısı dik ise*



Şekil 2: Paralellik ve orantılılık

$$AB : BC :: DB : BE \iff AC \parallel DE.$$

Teorem 17. $a : b :: a : c \implies b = c.$

Teorem 18. *Her $a : x :: x : b$ orantısı çözülebilir.*

Teorem 19. $a : b :: d : e \ \ \& \ \ b : c :: e : f \implies a : c :: d : f.$

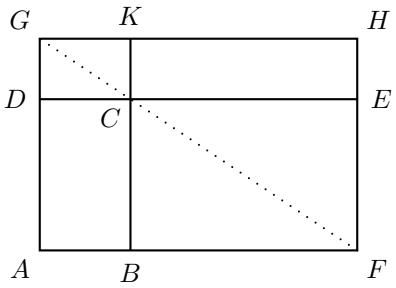
Tanım 20. $c : d :: b : e$ ise

$$(a : b) \,\&\, (c : d) :: b : e,$$

ve $b : e$ oranı, $a : b$ ve $c : d$ oranlarının **bileşkesidir.**

3 Alanlar

Teorem 21. *Aynı genişliği ve yüksekliği olan dikdörtgenler eşittir. Şekil 3'te $ABCD$ ve $CEHK$ dikdörtgenleri eşittir ancak ve ancak GC ve*



Şekil 3: Dikdörtgenlerin eşitliği

CF bir doğrudadır.

Tanım 22. Dikdörtgenin **alanı,** onun eşitlik sınıfıdır. Genişliği a ve yüksekliği b olan dikdörtgenin alanı

$$a \cdot b$$

veya ab ile gösterilir. Ayrıca $a \cdot a$ alanı

$$a^2$$

ile gösterilir.

Teorem 23. *Uzunlukların çarpması değişmelidir ve toplama üzerine dağılır. Ayrıca*

$$ab = ac \implies b = c.$$

Teorem 24. $a : b :: c : d \iff ad = bc \iff a : c :: b : d.$

Teorem 25. $a : b :: c : d \implies a : b :: a \pm c : b \pm d.$

Teorem 26. $ab = de \ \& \ ac = df \implies b : c :: e : f.$

Teorem 27. *Her $ab = cx$ denklemi çözülebilir.*

Tanım 28. Teorem 26 ve 27'ye göre alanların **oranı**

$$ab : ac :: b : c$$

ile tanımlanabilir.

Teorem 29. $ab : cd :: ab : ef \implies cd = ef.$

Teorem 30. $ab : cd :: ef : gh \implies ab : ef :: cd : gh.$

Teorem 31. $ab : cd :: ef : gh \implies ab : cd :: ab + ef : cd + gh.$

Teorem 32. $a : b :: c : d \iff a^2 : b^2 :: c^2 : d^2.$

Tanım 33. Açıları sırasıyla eşit olan üçgenler **benzerdir.**

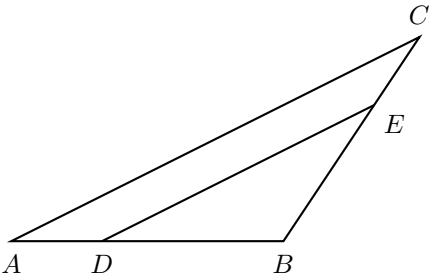
Teorem 34. *Benzer üçgenlerin kenarları orantılıdır, yani ABC ve DEF benzer ise*

$$AB : BC :: DE : EF.$$

Teorem 35. *Şekil 4'te ABC herhangi üçgen olsun.*

$$AB : BC :: DB : BE \iff AC \parallel DE.$$

Teorem 36. $(a : b) \ \& \ (c : d) :: ac : bd.$



Şekil 4: Paralellik ve orantılılık

4 Koni kesitleri ve paraboller

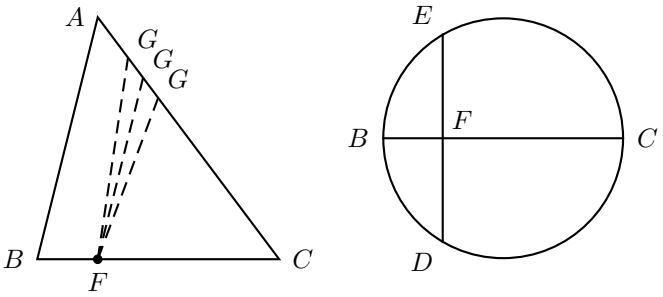
Tanım 37. Bir daire ve aynı düzlemde olmayan bir nokta, bir **koniyi** (*κῶνος* "çam kozalağı") belirtir. Daire, koninin **tabanıdır,** ve nokta, koninin **tepe noktasıdır.** Koninin **yüzeyi,** tepe noktasından tabanın sınırına giden doğrular tarafından oluşturulur. Koninin tepe noktasından tabanın merkezine giden doğru, koninin **eksenidir** (*ἄξων* "dingil"). Her durumda, ekseni içeren her düzlem, koniyi bir üçgende keser. Bu üçgene **eksen üçgeni** denebilir.

Söz 38. Koninin ekseni, koninin tabanına dik olmayabilir. Koninin eksen üçgeninin tabanı, koninin tabanının bir çapıdır.

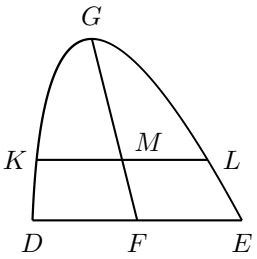
Teorem 39. *Bir koninin bir eksen üçgeni, Şekil 5'teki gibi tabanı BC olan ABC üçgeni olsun. Koninin tabanının DE kirişi çizilsin, ve bu kiriş, BC çapına dik olsun. O zaman kiriş, çap tarafından bir F noktasında ikiye bölünür, ve*

$$DF^2 = BF \cdot FC. \qquad (*)$$

Tanım 40. Teorem 39 durumunda DE kirişini içeren bir düzlem, eksen üçgeninin AC kenarını bir G noktasında kessin. O zaman bu düzlem, koninin yüzeyini Şekil 6'daki gibi bir DGE eğrisinde keser. Bu eğriye **koni kesiti** denir. DE doğrusu, eğrinin bir kirişidir.



Şekil 5: Koninin eksen üçgeni ve tabanı

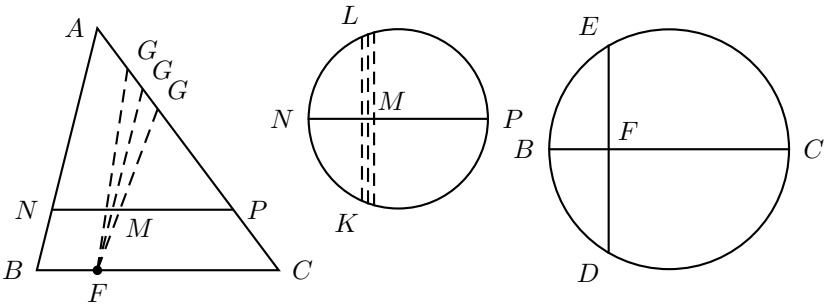


Şekil 6: Bir koni kesiti

Teorem 41. *KL doğrusu, yukarıdaki koni kesitinin başka bir kirişi olsun, ve bu kiriş, DE kirişine paralel olsun. KL kirişi ve FG doğrusu bir M noktasında kesişir. Ayrıca koninin tabanına paralel olan ve KL kirişini içeren bir düzlem vardır. Bu düzlem,*

- *ABC üçgenini BC tabanına paralel olan bir NP doğrusunda keser, ve*
- *koninin kendisini, çapı NP olan bir dairede keser.*

Şekil 7'ye bakın. Koni kesitinin LK kirişi, bu yeni dairenin kirişidir, ve dairenin NP çapına diktir, dolayısıyla $KM = ML$. Bu şekilde GF ışını, DGE koni kesitinin DE kirişine paralel olan her kirişi ikiye böler.



Şekil 7: Koninin eksen üçgeni ve tabanları

Tanım 42. Tanım 40 ve Teorem 41'de G noktası, koni kesitinin **köşesidir,** ve GF ışını koni kesitinin bir **çapıdır,** çünkü DE kirişine paralel olan kirişleri ikiye böler. Eğer çap, ikiye böldüğü ve birbirine paralel olan kirişlere dik ise, ona **eksen** denir. Ama her durumda DE kirişinin DF (veya EF) yarısına **ordinat** denir, ve çapın GF parçasına, DF ordinatına karşılık gelen **absis** denir.

Söz 43. O zaman KM ve LM doğruları da ordinattır, ve onlara karşılık gelen absis, GM doğrusudur.

Teorem 44. *Şekil 7'deki durumda $FG \parallel BA$ olsun. O zaman*

$$GM : GF :: ML^2 : FE^2.$$

Sonuç olarak bir ℓ uzunluğu için, koni kesitinin herhangi ordinatının uzunluğu y ve ordinata karşılık gelen absisin uzunluğu x ise

$$y^2 = \ell x.$$

Ayrıca

$$\ell : GA :: CB^2 :: CA \cdot CB.$$

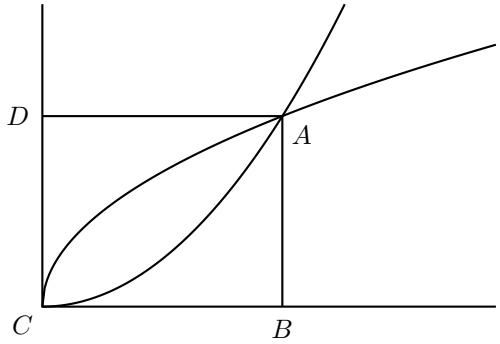
Tanım 45. Teorem 44'teki koni kesiti **paraboldür** ($\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}$ "uygulama, yerleştirme"), ve ℓ, parabolün **parametresidir** ve parabolün

dikey kenarının uzunluğudur.[3]

Teorem 46 (Menaechmus)**.** *Parametreleri a ve b olan paraboller ile*

$$a : x :: x : y :: y : b$$

orantıları Şekil 8'deki gibi çözülebilir. Parametresi b olan parabolün bir



Şekil 8: İki orta orantılı

ordinatı AB ve ona karşılık gelen absis CB ise, ve parametresi a olan parabolün bir ordinatı AD ve ona karşılık gelen absis CD ise, ve her parabolün ordinatları diğer parabolün çapına paralel ise, o zaman CB ve CD doğrularının uzunlukları yukarıdaki orantıları çözer.

5 Hacimler

Tanım 47. Dik paralelyüzün **hacmi,** onun eşitlik sınıfıdır. Genişliği a, yüksekliği b, ve derinliği c olan dik paralelyüzün hacmi

$$a \cdot b \cdot c$$

veya abc ile gösterilir.

[3]Dikey kenarın Latincesi, *latus rectum.*

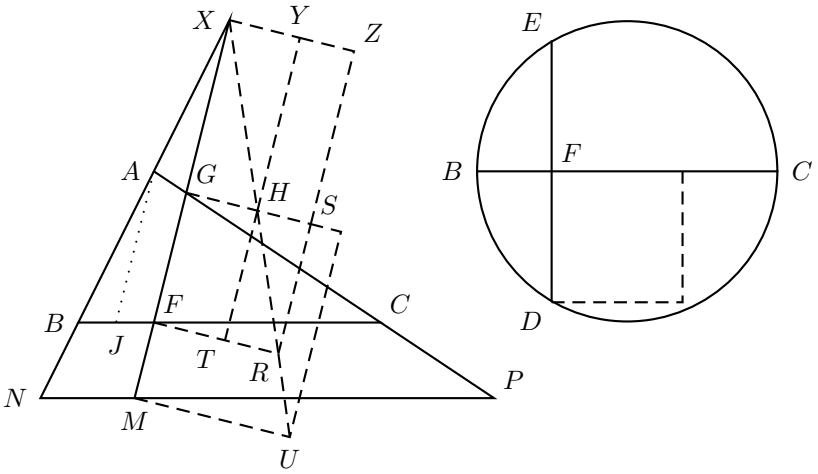
Teorem 48. $abc = bac = bca$ *ve* $ab(c+d) = abc + abd$.

Teorem 49. $abc = ade \implies bc = de$.

Teorem 50. $ab : cd :: e : f \iff abf = cde$.

6 Hiperboller

Teorem 51. *Şekil 5'te koni kesitinin* GF *çapı* G *noktasının ötesine uzatılırsa, Şekil 9'daki gibi* BA *doğrusunun uzatılmasını bir* X *noktasında kessin.* FR *doğrusu,* GF *çapına dik olsun ve*



Şekil 9: Konide hiperbol

$$FR \cdot FG = DF^2 \qquad (\dagger)$$

eşitliğini sağlasın. $MU \parallel FR$ *olsun, ve (gerekirse uzatılmış)* XR *ve* MU, U *noktasında kesişsin. O zaman*

$$GM \cdot MU = KM^2.$$

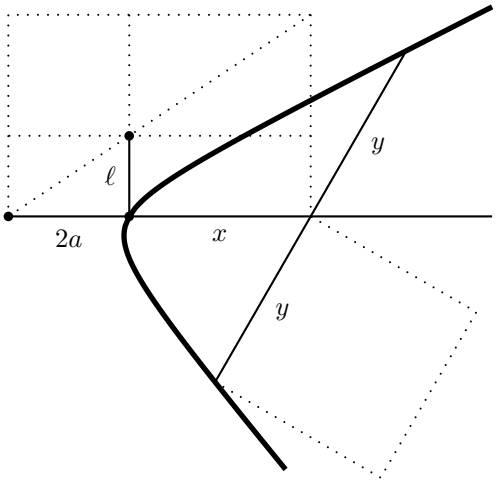
(KM, Şekil 7'deki gibidir.) AJ ∥ XF olsun; o zaman

$$GH : GX :: BJ \cdot JC : AJ^2.$$

GH doğrusunun uzunluğu ℓ olsun, ve GX doğrusunun uzunluğu 2a olsun. Koni kesitinin herhangi bir ordinatının uzunluğu y ve bu ordinata karşılık gelen absisin uzunluğu x ise

$$2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2.$$

Söz 52. Şekil 10'e bakın; buradaki ℓ-işaretli doğru, koni kesitinin düz-



Şekil 10: $2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$ hiperbolü

lemine dik olarak düşünülebilir.

Tanım 53. Teorem 51'de alanı y^2 olan kare, alanı ℓx olan dikdörtgenini aştığından, koni kesitine **hiperbol** ($\acute{\upsilon}\pi\epsilon\rho\beta o\lambda\acute{\eta}$ "aşma") denir; GH doğrusu, hiperbolün **dikey kenarıdır;** dikey kenarın ℓ uzunluğu,

hiperbolün **parametresidir;** GX doğrusu, hiperbolün **yanlamasına kenarıdır;**[4] yanlamasına kenarın orta noktası, hiperbolün **merkezidir.**

Söz 54. Şekil 9'da FS ve FH dikdörtgenlerinin farkı TS dikdörtgendir, ve bu dikdörtgen GY dikdörtgenine benzerdir.[5]

7 İşaretli uzunluklar ve elipsler

Tanım 55. Bir yön ile donatılmış bir doğru, bir **yönlü doğrudur.** Eğer AB, A'dan B'ye yön ile donatılırsa, oluşan yönlü doğru

$$\overrightarrow{AB}$$

biçiminde yazılabilir. $\overrightarrow{AA}$, **yoz** veya **dejenere** yönlü doğrudur ve A noktası olarak anlaşılabilir. Eğer $ABDC$ ve $DCEF$ paralelkenar ise, o zaman

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}, \qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF},$$

Özel olarak $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$.

Teorem 56. *Doğruların paralelliği ve yönlü doğruların eşitliği, denklik bağıntısıdır.*

Tanım 57. Yönlü doğrunun eşitlik sınıfı, **vektördür.**

Tanım 58. Her paralellik sınıfı için bir yön **pozitif,** diğer yön **negatif** olsun. O zaman her (yoz olmayan) yönlü doğru ya pozitif ya negatiftir. Bir yönlü doğrunun pozitifliği veya negatifliği, yönlü doğrunun **işaretidir.**

Teorem 59. *A, B, ve C bir doğruda olsun. O zaman $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BC}$ yönlü doğrularının işaretleri aynıdır ancak ve ancak $AB < AC$ ve $BC < AC$.*

[4] *πλάγια πλευρά*; Latincesi *latus transversum.*
[5] Bu GY dikdörtgeni, hiperbolün **şeklidir** (*εἶδος*).

Teorem 60. *Aşağıdaki koşulu sağlayan $\mathscr{R}$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır: $\overrightarrow{AB}\ \mathscr{R}\ \overrightarrow{CD}$ ancak ve ancak $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ yönlü doğrularının işaretleri aynı ve $AB = CD$.*

Tanım 61. Teorem 60'taki denklik bağıntısına göre bir yönlü doğrunun denklik sınıfı, **yönlü doğrunun uzunluğudur.**

Söz 62. Bir doğrunun uzunluğu, yeni tanımı alabilir: $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BA}$ yönlü doğrularının uzunluklarının hangisi pozitif ise, AB doğrusunun uzunluğu olarak alınabilir. Bu tanımı başlangıçtan kullanabildik.

Tanım 63. Küçük a, b, c, . . . Latin harfleri, yönlü doğrunun uzunluğunu (yani işaretli uzunluğunu) gösterecek. Yoz yönlü doğrunun uzunluğu,

$$0$$

olsun, ve $\overrightarrow{AB} = c$ ise

$$-c = \overrightarrow{BA}$$

olsun.

Teorem 64. *İki işaretli uzunluk toplanabilir, ve tanıma göre A, B, ve C bir doğruda ve*

$$\overrightarrow{AB} = d, \qquad \overrightarrow{BC} = e, \qquad \overrightarrow{AC} = f$$

ise

$$d + e = f.$$

Bu durumda toplama değişmeli ve birleşmelidir; ayrıca

$$a + 0 = a,$$
$$a + (-a) = 0.$$

Tanım 65.

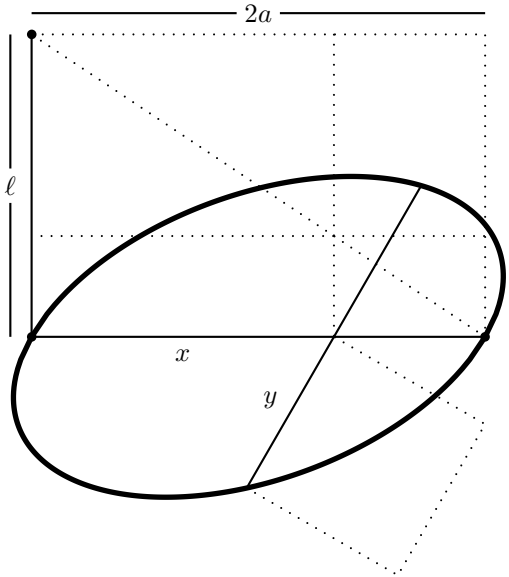
$$a - b = a + (-b),$$
$$-a \cdot b = -(ab) = a \cdot (-b),$$
$$-a \cdot bc = a \cdot (-b) \cdot c = ab \cdot (-c) = -(abc).$$

Şimdi hiperbolün $2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$ denkleminde x ve y negatif olabilir. Ayrıca a negatif olabilir, ama bu durumda tanımlanan eğri hiperbol değildir:

Tanım 66. $\ell > 0$ ve $a > 0$ ise

$$2ay^2 = 2a\ell x - \ell x^2$$

denklemi, **dikey kenarının** uzunluğu ℓ olan, **yanlamasına kenarının** uzunluğu $2a$ olan **elipsi** (ἔλλειψις "eksiklik") tanımlar (ama ordinatların çapa açısını seçilmeli). Şekil 11'e bakın. Hiperboldeki gibi



Şekil 11: $2ay^2 = 2a\ell x - \ell x^2$ elipsi

elipsin **merkezi,** yanlamasına kenarının orta noktasıdır. Hiperbol ve elips, **merkezli koni kesitidir.**

Teorem 67. *Teorem 51'de koni kesitinin GF çapı F noktasının ötesine uzatılırsa ve AB doğrusunun uzatılmasını keserse, hiperbolün yerine elips çıkar.*

Söz 68. Şimdi her koni kesiti ya parabol ya hiperbol ya da elipstir. Pergeli Apollonius bu adları vermiştir. Parabol olmayan her koni kesiti merkezlidir.

8 Eksenler

Tanım 69. Düzlemde iki doğru bir O noktasında kesişsin. Doğruların birine x **ekseni,** diğerine y **ekseni** densin, ve O noktasına **başlangıç noktası** densin.

Teorem 70. *Düzlemde her A noktası için x ekseninde bir ve tek bir B için, y ekseninde bir ve tek bir C için, $ABOC$ paralelkenardır. Tam tersine b ve c işaretli uzunluk olmak üzere, herhangi bir (b, c) sıralı ikilisi için, x ekseninde bir ve tek bir B için, y ekseninde bir ve tek bir C için, düzlemde bir ve tek bir A için*

$$\overrightarrow{OB} = b, \qquad \overrightarrow{OC} = c,$$

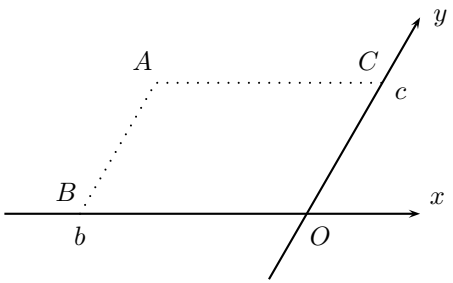
ve $ABOC$ paralelkenardır.

Tanım 71. Teorem 70'te b, A noktasının x **koordinatıdır,** ve c, A noktasının y **koordinatıdır.** Şekil 12'deki gibi B noktasına b yazılabilir, ve C noktasına c yazılabilir.

Söz 72. Şekil 13'teki koordinatları (b, c) olan nokta hiperboldeyse, koordinatları $(b, -c)$, $(-2a - b, c)$, ve $(-2a - b, -c)$ olan noktaları da hiperboldedir.

Teorem 73. *Denklemi $2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$ olan hiperbolü verilsin, ama yeni st eksenleri seçilsin. Eğer*

- *s ekseni, x eksenidir, ve*



Şekil 12: Koordinatlar

• *t ekseni, hiperbolün merkezinden geçer ve y eksenine paralel ise, o zaman yeni st eksenlerine göre hiperbolün denklemi,*

$$2at^2 = \ell s^2 - \ell a^2.$$

Teorem 74. *İşaretli uzunlukların oranı*

$$a : b :: c : d \iff ad = bc$$

kuralına göre tanımlanabilir. Oranların toplamı

$$(a : c) + (b : c) :: (a + b) : c$$

kuralına göre tanımlanabilir.

Söz 75. Şimdi oranları sayılar gibi kullanabiliriz.

Tanım 76. $a : a$ oranı

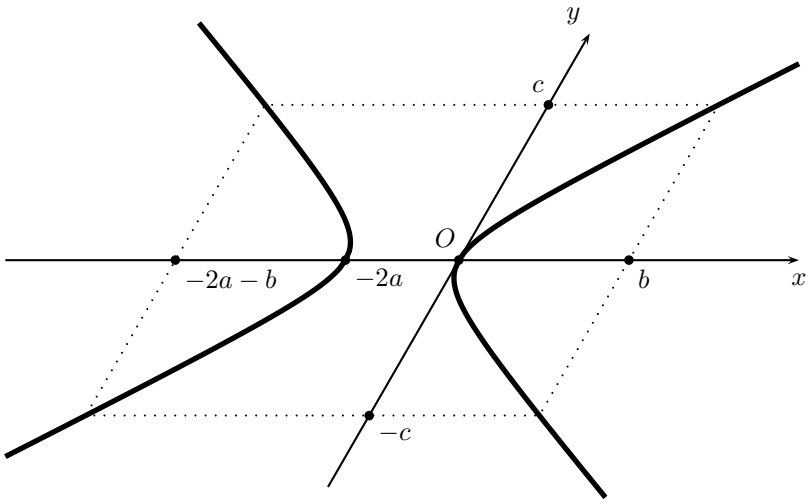
$$1$$

olarak yazılsın, ve $a : b$ oranı

$$\frac{a}{b}$$

veya a/b biçiminde yazılsın. O zaman hiperbolün $2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$ denklemi

$$y^2 = \ell x + \frac{\ell}{2a} x^2$$



Şekil 13: İkinci dalı ile $2ay^2 = 2a\ell x + \ell x^2$ hiperbolü

biçiminde yazılabilir. Bu denkleme **Apollonius denklemi** diyelim. Teorem 74'e göre, farklı eksenlere göre, hiperbolün $2ay^2 = \ell x^2 - \ell a^2$ denklemi de vardır; bu denklem

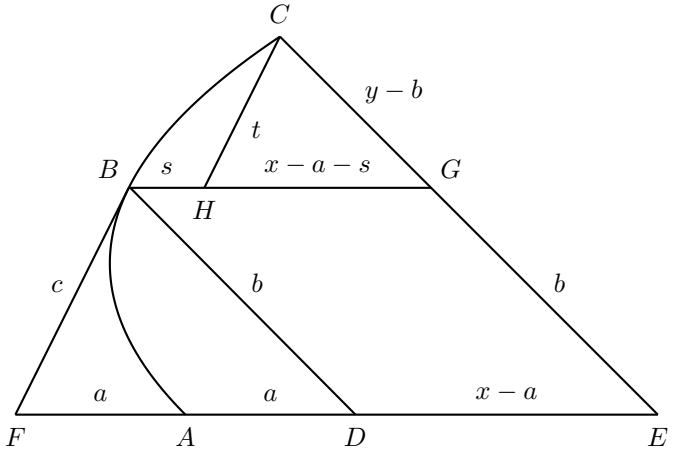
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\ell a/2} = 1$$

biçiminde yazılabilir. Bu denkleme **merkez denklemi** diyelim.

9 Dik eksenler

Teorem 77. *Parabolde çapa paralel olan her doğru, yeni bir çaptır. Şekil 14'teki gibi*

1) ABC eğrisi, çapı FE ve köşesi A olan parabol,
2) BD ve CE ordinat,
3) $FA = AD$, ve



Şekil 14: Parabolün yeni çapı

4) $BG \parallel FE$, $CH \parallel BF$
olsun. Aşağıdaki işaretli uzunlukları tanımlansın:

$$\overrightarrow{AD} = a, \qquad \overrightarrow{AE} = x, \qquad \overrightarrow{BH} = s, \qquad \overrightarrow{FB} = c.$$
$$\overrightarrow{DB} = b, \qquad \overrightarrow{EC} = y, \qquad \overrightarrow{HC} = t,$$

Parabolün dikey kenarının uzunluğu ℓ *ise*

$$\frac{m}{\ell} = \frac{c^2}{b^2}$$

olsun. O zaman

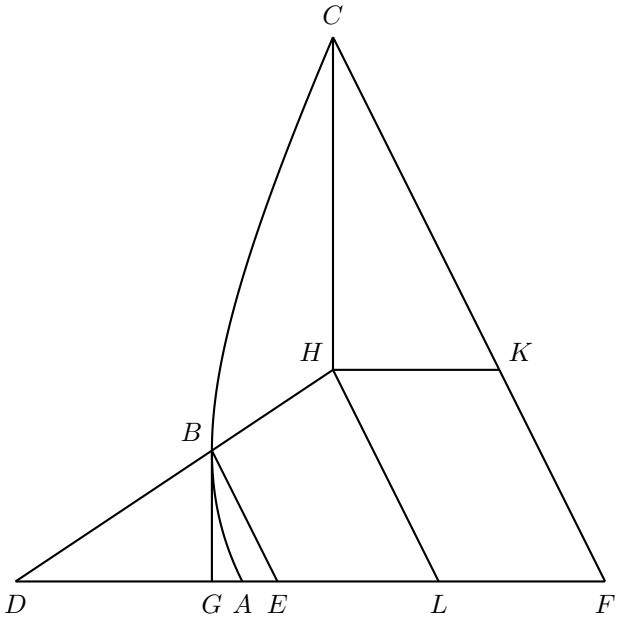
$$y^2 = \ell x$$

olduğundan

$$t^2 = ms.$$

Teorem 78. *Parabolün bir (ve tek bir) çapı için ordinatlar çapa diktir (yani Tanım 37'deki gibi parabolün ekseni ve tek bir ekseni vardır).*

Teorem 79. *Hiperbolün merkezinden geçen ve hiperbolü kesen her doğru, hiperbolün yeni bir çapıdır. Şekil 15'teki gibi*

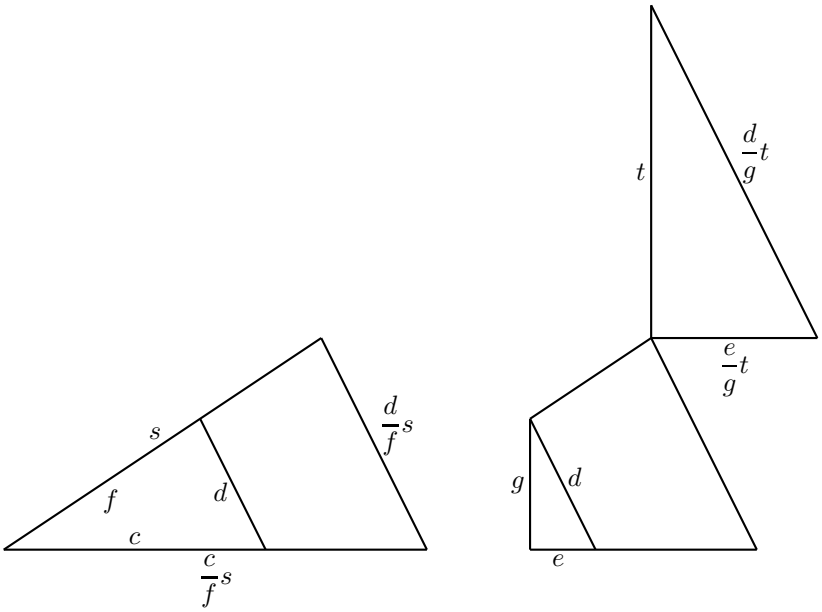


Şekil 15: Hiperbolün yeni çapı

1) ABC eğrisi, merkezi D olan ve çapı DF olan hiperbol,
2) BE ve CF ordinat,
3) $DG : DA :: DA : DE$,
4) $CH \parallel BG$, $HK \parallel DA$, $HL \parallel BE$
olsun. Aşağıdaki işaretli uzunluklar tanımlansın:

$$\overrightarrow{DF} = x, \quad \overrightarrow{DH} = s, \quad \overrightarrow{DE} = c, \quad \overrightarrow{DA} = a, \quad \overrightarrow{DB} = f,$$
$$\overrightarrow{FC} = y, \quad \overrightarrow{HC} = t, \quad \overrightarrow{EB} = d, \quad \overrightarrow{GE} = e, \quad \overrightarrow{GB} = g.$$

(Şekil 16'ya bakın.) Hiperbolün dikey kenarının uzunluğu ℓ ve $2b^2 = \ell a$



Şekil 16: Hiperbolün benzer üçgenleri

ise

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

olduğundan

$$\frac{s^2}{f^2} - \frac{t^2}{g^2 c/e} = 1.$$

Teorem 80. *Hiperbolün bir (ve tek bir) çapı için ordinatlar çapa diktir, yani hiperbolün bir (ve tek bir) ekseni vardır.*

10 Uzaklık

Söz 81. Dik üçgenle $x^2 = a^2 + b^2$ denkleminin çözümü bulunabilir.

Tanım 82. $x^2 = a^2 + b^2$ denkleminin (pozitif) çözümü

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Tanım 83. Eksenler verilirse, "koordinatları (a, b) olan nokta" ifadesinin yerine "(a, b) noktası" diyebiliriz.

Teorem 84. *Eksenler dik ise (a, b) noktasının (c, d) noktasından uzaklığı*

$$\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$

Tanım 85. Eksenler dik ve $a \neq c$ ise ucu (a, b) ve (c, d) olan doğrunun **eğimi**

$$\frac{b-d}{a-c}.$$

Söz 86. Tanım 85'te eksenlerin dik olması gerekmez ama normaldir.

Teorem 87. *Paralel doğruların eğimleri aynıdır. Dik eksene göre, $a \neq c$ ise (a, b) ve (c, d) noktalarından geçen uçsuz doğrunun noktaları,*

$$y = \frac{d-b}{c-a} \cdot (x - a) + b$$

denklemini sağlayan noktalarıdır. Eğimi e/f olan ve (a, b) noktasından geçen uçsuz doğrunun noktaları,

$$y = \frac{e}{f} \cdot (x - a) + b$$

denklemini sağlayan noktalarıdır. y eksenine paralel olan ve (a, b) noktasından geçen uçsuz doğrunun noktaları,

$$x = a$$

denklemini sağlayan noktalarıdır.

Söz 88. Şu anda Descartes'ın ortaya koyduğu uylaşım uygundur:

Tanım 89. Bir **birim** uzunluğu seçilirse,

$$1$$

olarak yazılabilir. Eğer $a \cdot b = c \cdot 1$ ise, o zaman ab alanı c olarak anlaşılabilir. Bu şekilde alan, hacim, oran—her şey bir uzunluk olur. Özel olarak eğim, bir harf ile yazılabilir.

Teorem 90. *Dik eksenlere ve birim uzunluğuna göre y eksenine paralel olmayan doğrunun denkliği*

$$y = mx + b$$

biçiminde yazılabilir, ve bunun gibi her denklem, eğimi m olan ve $(0, b)$ noktasından geçen doğruyu tanımlar. Benzer şekilde $a \neq 0$ veya $b \neq 0$ ise (yani $a^2 + b^2 \neq 0$ ise)

$$ax + by + c = 0$$

denklemi bir doğru tanımlar, ve her doğrunun denklemi bu şekilde yazılabilir.

Tanım 91. Şekil 17'de $\angle BAC$ dik ise

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Burada α, $\angle BAC$ açısının eşitlik sınıfı olarak anlaşılabilir, ve $\cos\alpha$, açının **kosinüsüdür.** Dik açının ölçüsü

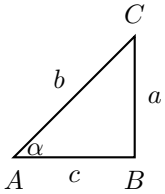
$$\frac{\pi}{2}.$$

O zaman

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

ve β geniş açı ise

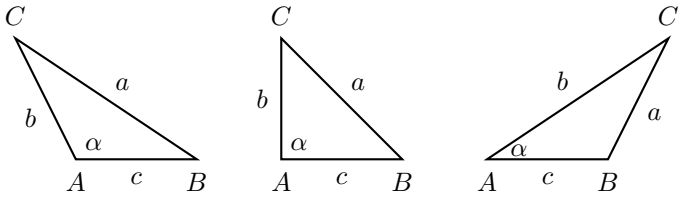
$$\cos\beta = -\cos(\pi - \beta).$$



Şekil 17: Kosinüs tanımı

Teorem 92 (Kosinüs Teoremi)**.** *Şekil 18'de*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$



Şekil 18: Kosinüs Teoremi

Tanım 93. Dik eksenlere göre

$$(a,b)\cdot(c,d) = ac + bd,$$
$$\|(a,b)\| = \sqrt{(a,b)\cdot(a,b)} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

(a,b) noktası, $(0,0)$ başlangıç noktasından (a,b) noktasına giden yönlü doğru olarak anlaşılabilir.

Teorem 94. *Dik eksenlere göre* (a,b) *ve* (c,d) *arasındaki açı* θ *ise*

$$(a,b)\cdot(c,d) = \|(a,b)\|\cdot\|(c,d)\|\cdot\cos\theta.$$

Teorem 95 (Cauchy–Schwartz Eşitsizliği)**.**

$$(ac + bd)^2 \leqslant (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2).$$

Tanım 96 (mutlak değer)**.** $|a| = \begin{cases} a, & \text{eğer } a \geqslant 0 \text{ ise,} \\ -a, & \text{eğer } a < 0 \text{ ise.} \end{cases}$

Teorem 97. *Dik eksenlere ve birim uzunluğuna göre* (s, t) *noktasının* $ax + by + c = 0$ *doğrusuna uzaklığı*

$$\frac{|as + bt + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

11 Dik eksenlere göre koni kesitleri

Tanım 98. $a \neq 0$ ise

$$\frac{a}{\infty} = 0.$$

Söz 99. Şimdi $\ell > 0$ ve $a \neq 0$ ise, dik eksenlere göre,

$$y^2 = \ell x - \frac{\ell}{2a} x^2$$

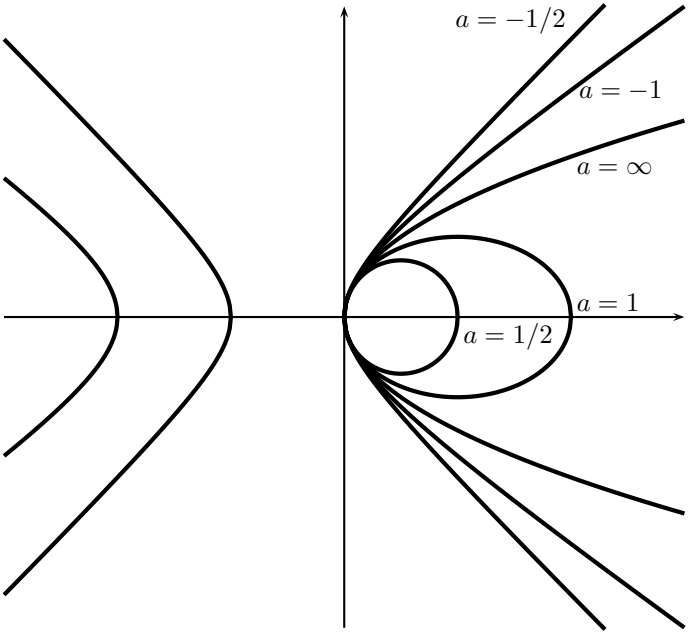
Apollonius denklemi, ekseni x ekseni olan ve köşesi başlangıç noktası olan

- $a < 0$ durumunda hiperbolü,
- $a = \infty$ durumunda parabolü,
- $a > 0$ durumunda elipsi

tanımlar. Şekil 19'a bakın.

Söz 100. $\ell > 0$ ve $a \neq 0$ (ve $a \neq \infty$) olsun, ve

$$b > 0, \qquad 2b^2 = \ell a$$



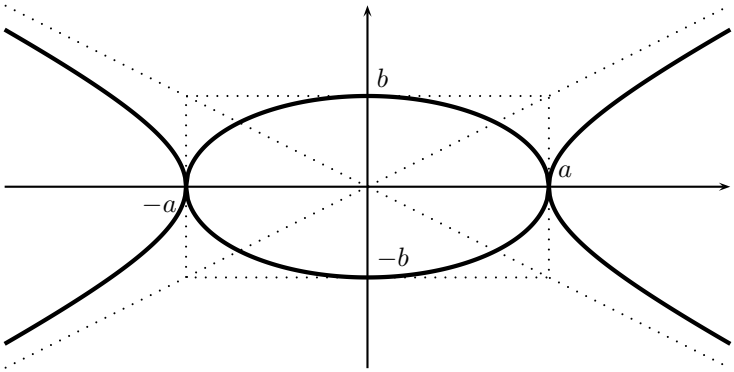
Şekil 19: $y^2 = x - x^2/2a$ koni kesitleri

olsun. O zaman dikey kenarı ℓ olan, yanlamasına kenarı $2|a|$ olan merkezli koni kesitlerinin merkez denklemi

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Şekil 20'ye bakın.

Tanım 101. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$ denklemi, $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ hiperbolün **asimptotlarını** tanımlar. Yani hiperbolün asimptotları, $y = \pm(b/a)x$ doğrularıdır.



Şekil 20: $x^2/4 \pm y^2 = 1$ koni kesitleri

Teorem 102. *$y^2 = \ell x + (\ell/2a)x^2$ hiperbolün asimptotlarının denklemi*

$$y = \pm\sqrt{\frac{\ell}{2a}} \cdot (x - a).$$

Tanım 103. Denklemi $y^2 = \ell x$ olan parabolün **odak noktası**

$$\left(\frac{\ell}{4}, 0\right)$$

ve **doğrultman doğrusu**

$$x + \frac{\ell}{4} = 0.$$

Teorem 104. *Denklemi $y^2 = \ell x$ olan parabolün noktaları, odak noktasına ve doğrultmana uzaklığı aynı olan noktalardır.*

Tanım 105. Denklemi $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ olan hiperbolün **odak noktaları**

$$(\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0),$$

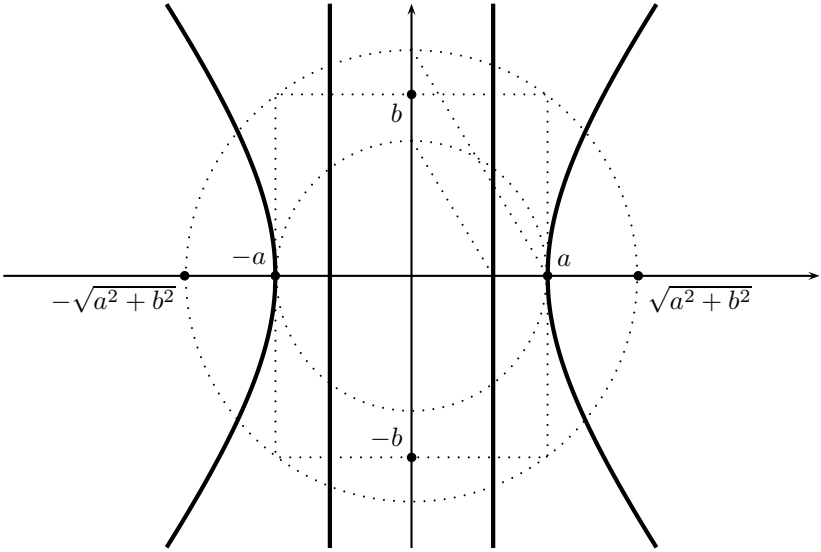
(sırasıyla) **doğrultman doğruları**

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

ve **dışmerkezliliği**

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Şekil 21'e bakın. Ayrıca $0 < b < a$ ise denklemi $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ olan



Şekil 21: Hiperbolün odakları ve doğrultmanları

elipsin **odak noktaları**

$$(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0),$$

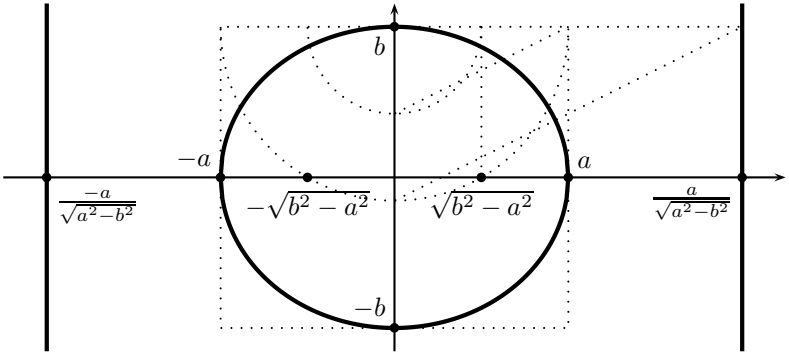
(sırasıyla) **doğrultman doğruları**

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

ve **dışmerkezliliği**

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Şekil 22'ye bakın.



Şekil 22: Elipsin odakları ve doğrultmanları

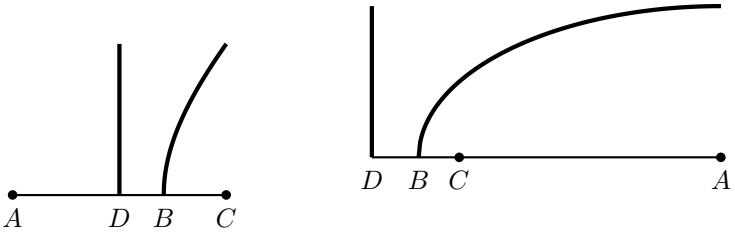
Söz 106. Şekil 23'teki gibi merkezli koni kesitinin merkezi A, ve (merkezin aynı tarafında olan) köşesi B, ve odağı C ise, ve doğrultmanı, koni kesitinin eksenini D noktasında keserse, tanıma göre koni kesitinin dışmerkezliliği $AC : AB$, ama

$$AC : AB :: AB : AD,$$

dolayısıyla

$$BC : BD :: AC : AB,$$

ve sonuç olarak koni kesitinin dışmerkezliliği $BC : BD$.



Şekil 23: Odak ve doğrultman

Teorem 107. *Merkezli koni kesitinin noktaları, bir odak noktasına ve ona karşılık gelen doğrultman doğrusuna uzaklıklarının oranının dış-merkezlilik olduğu noktalardır. Yani Şekil 24'te ($CB = C'B'$ ve $BD = B'D'$ olduğundan) aşağıdaki koşullar denktir:*

- *E noktası koni kesitinde,*
- *$CE : EF :: CB : BD$,*
- *$C'E : EF' :: CB : BD$.*

Söz 108. $BC : BD :: AB : AD :: BB' : DD'$ olduğundan merkezli koni kesitinin E noktaları için (ve sadece bu noktalar için)

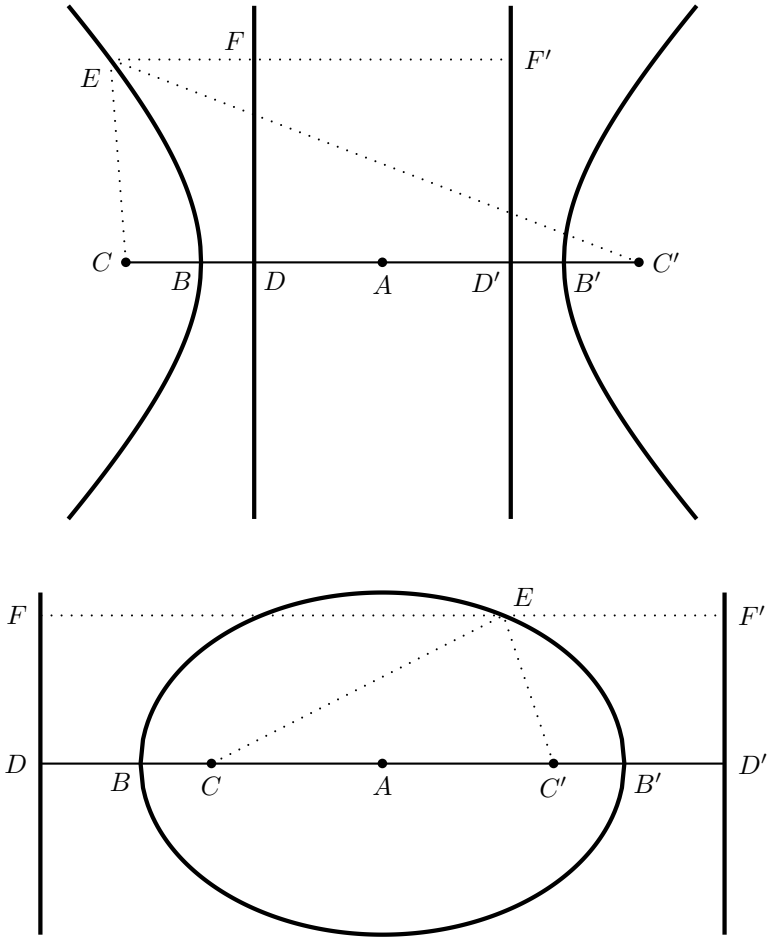
$$C'E \pm CE : EF' \pm EF :: BB' : DD'.$$

Elipste $EF' + EF = FF' = DD'$, dolayısıyla

$$CE + C'E = BB'.$$

Hiperbolde E, soldaki daldaysa $EF' - EF = DD'$, dolayısıyla

$$C'E - CE = BB'.$$



Şekil 24: Dışmerkezlilik