Analitik Geometri (MAT 104) Telafi Sınavı Çözümleri

David Pierce

14 Nisan 2014

Problem 1. $ab : cd :: ef : gh$ ise

$$ab : ef :: cd : gh$$

orantısını kanıtlayın. (Bundan önce kanıtladığımız teoremleri kullanabilirsiniz.)

Bazı k, ℓ, ve m için

$$cd = ak, \qquad ef = a\ell, \qquad gh = am,$$

dolayısıyla

$$b : k :: \ell : m$$

çünkü, varsayımdan,

$$b : k :: ab : ak :: ab : cd :: ef : gh :: a\ell : am :: \ell : m.$$

Sonuç olarak

$$b : \ell :: k : m,$$
$$ab : a\ell :: ak : am,$$
$$ab : ef :: cd : gh.$$

Problem 2. A, B, ve C noktaları birbirinden farklı ama aynı doğruda olsun, ve bu doğrunun pozitif yönü seçilmiş olsun. $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BC}$ yönlü doğrularının işaretlerinin aynı olması için,

$$AB < AC, \qquad BC < AC$$

koşullarının gerekli ve yeterli olduğunu gösterin.

Doğruda noktaların sırası aşağıdakilerin biridir (veya birinin tersidir):

$$ABC, \qquad CAB, \qquad BCA.$$

İlk durumda $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{BC}$ yönlü doğrularının işaretleri aynıdır ve verilen koşullar sağlanır. Kalan durumlarda işaretler farklıdır, ve ikinci durumda $BC > AC$, üçüncü durumda $AB > AC$.

Problem 3. Düzlemde dik xy eksenleri ve birim uzunluğu seçilsin.

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$

denklemi, a, b, c, d, ve e sabitlerinin hangi koşulları altında parabolü tanımlar? hiperbolü? elipsi?

Tanımlanan eğri parabol ise $ab = 0$, ama $a \neq 0$ veya $b \neq 0$. Bu koşullar yeterlidir.

$ab \neq 0$ olsun; o zaman

$$\begin{aligned}
&ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0 \\
\iff{} & a\left(x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{c^2}{4a^2}\right) + b\left(y^2 + \frac{d}{b}y + \frac{d^2}{4b^2}\right) + e \\
&\qquad = \frac{c^2}{4a} + \frac{d^2}{4b} \\
\iff{} & a\left(x + \frac{c}{2a}\right)^2 + b\left(y + \frac{d}{2b}\right)^2 = \frac{c^2}{4a} + \frac{d^2}{4b} - e.
\end{aligned}$$

Şimdi

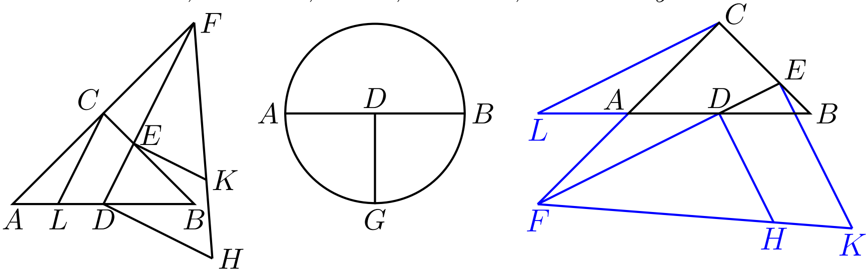
$$\frac{c^2}{4a} + \frac{d^2}{4b} - e = f$$

olsun.

- Eğri hiperbol ise $ab < 0$ ve $f \neq 0$, ve bu koşullar yeterlidir;
- elips ise a, b, ve f'nin işaretleri aynıdır, ve bu yeterlidir.

Problem 4. Şekillerde

- Bir doğru, ABC üçgeninin kenarlarını D, E, ve F'de kessin;
- AB, çemberin çapı olsun, ve $DG \perp AB$ olsun;
- $DH \perp DE$ ve $DH \cdot DE = DG^2$ olsun;
- EK, DH'ye paralel olsun ve FH'yi K'de kessin;
- CL, DE'ye paralel olsun ve AB'yi L'de kessin;
- $\overrightarrow{EF} = a$, $\overrightarrow{ED} = x$, $x > 0$, $EK = b$, ve $DG = y$ olsun.



a) Sağdaki şekli tamamlayın.

b) Sadece a ve b'yi kullanarak $AL \cdot LB : CL^2 ::$ $\underline{\quad b : |a| \quad}$?

c) Sadece a, b, ve x'i kullanarak $y^2 =$ $\underline{\quad bx - \dfrac{b}{a} \cdot x^2 \quad}$?

$$\begin{aligned}
AL \cdot LB : CL^2 &:: (AL : CL) \,\&\, (LB : CL)\\
&:: (AD : FD) \,\&\, (DB : ED)\\
&:: AD \cdot DB : FD \cdot ED\\
&:: DG^2 : FD \cdot ED\\
&:: DH \cdot DE : FD \cdot ED\\
&:: DH : FD :: EK : FE :: b : |a|.
\end{aligned}$$

$$y^2 = DH \cdot x = \frac{EK}{EF} \cdot DF \cdot x = \frac{b}{|a|} \cdot |a - x| \cdot x = \frac{b}{a} \cdot (a - x) \cdot x$$

çünkü $a > 0 \iff a > x$.