Öklid Geometrisine Giriş

Eski arasınav ve final geometri soruları

MSGSÜ Matematik Bölümü

20 Kasım 2018

Soru 1. Verilmiş sınırlanmış doğruda eşkenar olmayan bir ikizkenar üçgen inşa edin. Eğer mümkünse bunu Öklid'in önermelerini kullanmadan yapın.

Soru 2. Üç açısı eşit olan bir üçgenin eşkenar olacağını ispatlayın.

Soru 3. Κύμη kolonisi, M.Ö. 8. yüzyılda, bugün Napoli olan bölgenin yanında, Eğriboz'dan ve Batı Anadolu'da şimdinin Aliağa'sı[1] yakınlarındaki Κύμη'den göçenler tarafından kurulmuştur. Yunan alfabesinin Κύμη kolonisi'nde kullanılan halinden türetilen Latin alfabesinin zaman içinde 23 harfi olmuştur:

A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z

[1] Paul Harvey, *The Oxford Companion to Classical Literature* (1980); Bilge Umar, *Türkiye'deki Tarihsel Adlar* (İstanbul: İnkilâp, 1993).

863 yılında, Kiril adında Selanik'li bir rahip, kutsal yazıtları Yunancadan, Eski Bulgarca'ya çevirmek için Glagol denen alfabeyi icat etmiştir. Hemen sonra, daha basit olan Kiril alfabesi icat edilmiştir.[2] Kiril alfabesi, 1918'de Sovyet yönetiminin birkaç harfi kaldırması gibi, bazı değişikliklerin ardından, 33 harfli günümüz Rus alfabesine dönüşmüştür:

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н
О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я

Bu alfabe 24 harfli Yunan alfabesinin 19 harfini, aynı sırayla ama bazılarının formları değişmiş şekilde korumaktadır.

(a) Yunan alfabesinin 24 harfi nelerdir?

(b) Aşağıdaki kişilerin isimleri Türkçe'de nelerdir?

ΘΑΛΗΣ ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ ΠΛΑΤΩΝ
῾ΙΠΠΟΚΡΑΤΗΣ ᾽ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ ᾽ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ

Soru 4. Aşağıdaki önermenin nesi hatalı?

1. Bir üçgende tabandaki bir dış açının açıortayı ile tabandaki karşıt iç açının açıortayı kesişirse oluşturdukları açılar dik değildir.

2. Bir ABC üçgeni verilmiş olsun.

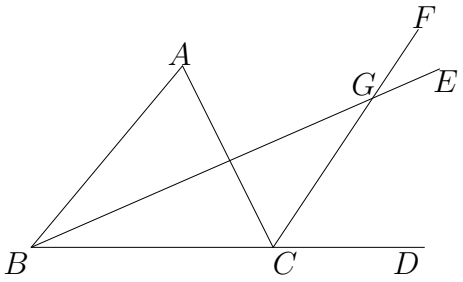
3. BC kenarı bir D noktasına kadar uzatılmış olsun.

4. ABC açısının açıortayı BE ve ACD açısının açıortayı CF, G noktasında kesişsinler.

5. İddia ediyorum ki BGC, EGF, CGE ve BGF açılarının hiçbiri dik değildir.

6. ACD açısı ABC üçgeninin bir dış açısı olduğundan iç ve karşıt BAC açısından büyüktür.

[2] S. H. Gould, *Russian for the Mathematician* (Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972). Pek çok alfabe Carl Faulmann'ın *Yazı Kitabı*'nda görülebilir (Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları, 2001).



7. ABC bir üçgen olduğundan ABC ve BAC açıları iki dik açıdan küçüktür.

8. 7. adıma göre ABC ve BAC açıları iki dik açıdan küçük olduğundan, BAC açısı da iki dik açıdan küçüktür.

9. CF, ACD açısının açıortayı olduğu için ACF ve FCD açıları birbirine eşittir.

10. CF, ACD açısının açıortayı olduğu için ACF ve FCD açıları birlikte ACD açısına eşittir.

11. 6. ve 10. adımlara göre ACF ve FCD açıları birlikte BAC açısından büyüktür.

12. 8. ve 11. adımlara göre ACF ve FCD açıları birlikte iki dik açıdan küçüktür.

13. 9. ve 12. adımlara göre FCD açısı bir dik açıdan küçüktür.

14. GCD açısı BCG üçgeninin bir dış açısı olduğu için BCG üçgeninin iç ve karşıt CGB açısından büyüktür.

15. 13. ve 14. adımlara göre CGB açısı bir dik açıdan küçüktür. Dolayısıyla dik değildir.

16. CGB ve BGF açıları aynı doğruda olduklarından ve 15. adımdan BGF açısı bir dik açıdan büyüktür. Dolayısıyla dik değildir.

17. FGE ve CGB açıları ters açı oldukları için birbirine eşittir. Dolayısıyla 15. adımdan FGE dik değildir.

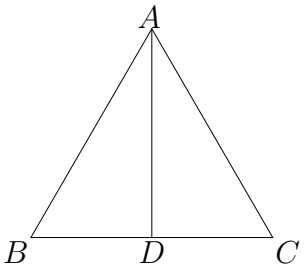
18. EGC ve BGF açıları ters açı oldukları için birbirine eşittir. Dolayısıyla 16. adımdan EGC dik değildir.

Soru 5. Aşağıdaki önermeyi tamamlayın:

İlan: Eşkenar üçgenlerde bir kenarortay üçgenin bir kenarından küçük ve üçgenin bir kenarının yarısından büyüktür.

Açıklama: ABC eşkenar üçgeni verilmiş olsun. BC kenarını ikiye bölen AD kenarortayı çizilmiş olsun.

Belirtme: İddia ediyorum ki AD, AB kenarından küçüktür ve BD, AD kenarortayından küçüktür.



Soru 6. Verilmiş eşkenar üçgene eşit olan bir dikdörtgen inşa edin. (Bu, Öklid'in I.42. önermesinin özel bir durumudur. Bu önerme dışındaki önermeleri kullanabilirsiniz.)

Soru 7. Aşağıdaki problemleri çözün. (Bu, Öklid'in III.17. önermesidir. Bu önerme dışındaki önermeleri kullanabilirsiniz.)

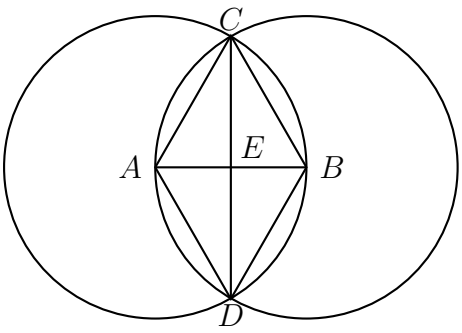
a) Verilmiş çemberdeki verilmiş noktadan değen doğruyu çizmek.

b) Verilmiş daire dışındaki verilmiş noktadan değen doğruyu çizmek.

Soru 8. Figürde

- CBD, merkezi A olan bir çember;
- CAD, merkezi B olan bir çember;
- AEB ile CED, doğru çizgiler

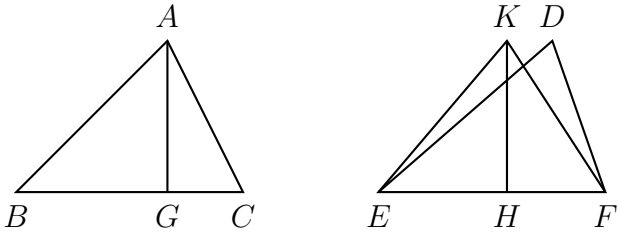
olsun. AEC açısının dik açı olduğunu gösterin.



Soru 9. Figürde

- $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$, $BG = EH$, $AG = KH$;
- BGA ile EHK açıları, dik

olsun. Figürün imkânsız olduğunu gösterin, yani K ile D noktalarının farklı noktalar olamadığını gösterin.



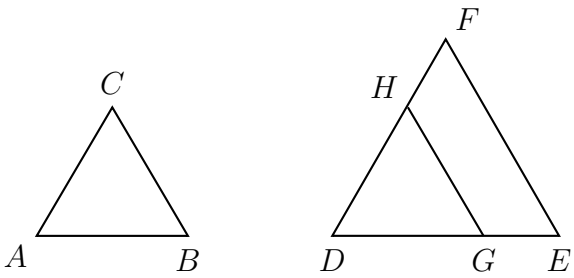
Soru 10.

- Açılarının biri dik olan,
- en kısa kenarı verilmiş doğru olan,
- o kenarı gören açısı kalan dik olmayan açısının yarısı olan

bir üçgen inşa edin. (Yani en kısa kenarı verilmiş bir doğru olan bir '30-60-90' üçgen inşa edin.)

Soru 11. Aşağıdaki önermede hangi adım, Öklid'in ilk 4 postülatı ve ilk 20 önermesi kullanılarak doğrulanamaz?

1. Tüm eşkenar üçgenlerin tüm açılarının birbirine eşit olduğunu göstereceğiz.
2. ABC ile DEF, eşkenar üçgenler olsun.
3. A açısının D açısına eşit olduğunu göstereceğiz.
4. $AB = DE$ ise, $BC = DF$ ve $AC = DF$ de olur.
5. O halde A açısı D açısına eşit olmalı.
6. $AB < DE$ olsun.
7. O zaman $AC < DF$.
8. DE kenarından AB kenarına eşit olan DG doğrusu kesilsin.
9. DF kenarından AC kenarına eşit olan DH doğrusu kesilsin.
10. G ile H noktaları birleştirilsin.
11. O zaman DGH üçgeni, eskenar üçgendir.
12. $GH = BC$.
13. A açısı, D açısına eşittir.
14. $DE < AC$ ise, benzer şekilde A açısı, D açısına eşittir.



Soru 12. Aşağıdaki soruların *biriyi* çözün.

A. Aşağıdaki bitkilerin ve deniz hayvanlarının isimleri Türkçe'de nedir?

ΑΓΚΙΝΑΡΑ, ΑΣΤΑΚΟΣ, ΚΑΣΤΑΝΙΑ
ΜΥΔΙΑ, ΠΡΑΣΟ, ΣΤΡΕΙΔΙΑ

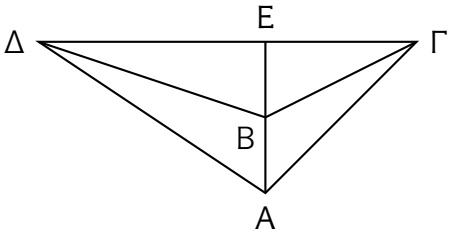
B. Yunan alfabesini sırasında yazın.
C. Öklid'in ilk 6 önermesi için, kullandığı önermeleri (ve sadece onları) yazın.

Soru 13. Bir alıştırmaya göre, verilmiş bir dörtgen bir paralelkenar ise, o zaman köşegenleri birbirini ikiye böler. Bu önermenin tersini gösterin.

Soru 14. ABC üçgeninde ABC açısı dik olsun. CB'nin, AC'den küçük olduğunu gösterin.

Soru 15. *$\mathsf{AB\Gamma}$ ve $\mathsf{AB\Delta}$ üçgenlerinin her biri, tabanı AB olan ikizkenar üçgen olsun. O zaman $\mathsf{\Gamma\Delta}$ doğrusu, AB doğrusunu keser.* Bu teoremin aşağıdaki kanıtının 2, 3, 7, ve 10 adımlarını gerekçelendirin.

1. Değilse, postulat 2 ile AB uzatılsın, ve şekildeki gibi $\mathsf{\Gamma\Delta}$, uzatılmış doğruyu E noktasında kessin.

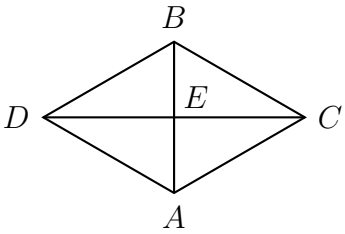


2. $\angle\mathsf{AB\Gamma} = \angle\mathsf{BA\Gamma}$.
3. $\angle\mathsf{AB\Gamma} + \angle\mathsf{BA\Gamma} <$ 2 dik açı.
4. $\angle\mathsf{AB\Gamma} + \angle\mathsf{AB\Gamma} <$ 2 dik açı.
5. $\angle\mathsf{AB\Gamma} <$ dik açı.
6. Aynı şekilde $\angle\mathsf{AB\Delta} <$ dik açı.
7. $\angle\mathsf{BE\Gamma} + \angle\mathsf{BE\Delta} =$ 2 dik açı.

8. $\mathsf{BE\Gamma}$ ve $\mathsf{BE\Delta}$ açılarının biri, ya dik ya da dik açıdan küçüktür.
9. $\angle\mathsf{BE\Gamma} \geqslant$ dik açı olsun.
10. $\angle\mathsf{AB\Gamma} > \angle\mathsf{BE\Gamma}$.
11. Yani dik açıdan küçük olan açı, dik açıdan küçük olmayan açıdan büyüktür.
12. Ki bu imkânsızdır.

Soru 16. *Verilmiş doğruyu ikiye bölmek.* Bu problemin aşağıdaki çözümünün yanlışını veya yanlışlarını düzeltin.

1. Verilmiş doğru, AB olsun.
2. Önerme 1'i kullanarak ABC ve ABD eşkenar üçgen olsun.



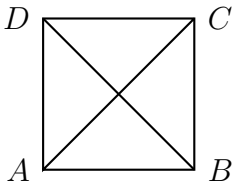
3. 15 numaralı soruya göre CD ve AB doğruları bir E noktasında kesişir.
4. Önerme 5'e göre $\angle ACD = \angle BCD$.
5. Önerme 6'ya göre $AE = EB$.

Soru 17. $\mathsf{\Gamma B} \neq \mathsf{\Delta B}$ ve $\mathsf{A\Gamma} = \mathsf{A\Delta}$ olacak şekilde iki $\mathsf{AB\Gamma}$ ve $\mathsf{AB\Delta}$ üçgeni inşa ediniz. İnşanızın doğru olduğunu gösterin. Yalnız Öklid'in tanım (sınır), postulat, ortak kavram, ve önermelerini kullanın.

Soru 18. Aşağıdaki önerme doğru mu, yanlış mı? Açıklayın.

1. Dışbükey bir dörtgenin köşegeni çizilirse, yanındaki açı, gördüğü açıdan küçüktür.

2. Dörtgen $ABCD$ olsun, ve köşegeni BD olsun.



3. Diyorum ki BDC açısı, BCD açısından küçüktür.
4. Zira AC köşegeni çizilsin.
5. BAC açısı, BAD açısından küçüktür.
6. Dolayısıyla $BC < BD$.
7. Bu durumda BDC açısı, BCD açısından küçüktür.

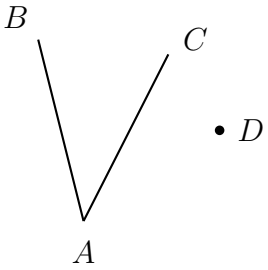
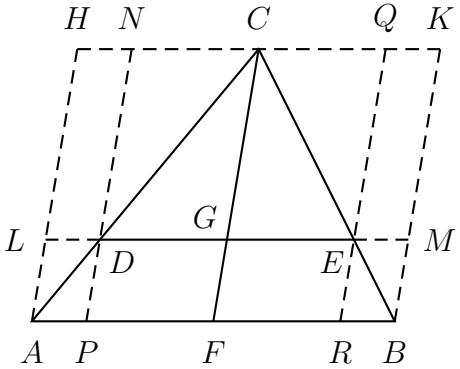
Soru 19. İkizkenar üçgende tabandaki açıları ikiye bölenlerin (yani *açıortayların*) birbirine eşit olduğunu gösterin.

Soru 20. İki dik üçgende dik açıyı gören kenar dik açıyı gören kenara eşitse ve diğer bir kenar diğer bir kenara eşitse, o zaman kalan kenarın kalan kenara eşit olacağını kanıtlayın.

Soru 21. Bir üçgenin köşelerinden geçen bir çember çizin. (Tabii ki inşanızın neden doğru olduğunu açıklamalısınız.)

Soru 22. AB ve AC doğrularının kesişimi ile oluşan bir BAC açısı ve bir D noktası verilmiş olsun. D noktasından geçen ve (A'nın tarafında) AB, AC doğrularından eşit parçalar ayıran bir doğru çizilebileceğini gösteriniz. *İpucu*: BAC açısını ikiye bölen doğruyu çizerek başlayabilirsiniz.

Soru 23. Bir ABC üçgeninin AB tabanına paralel olan ve diğer kenarları kesen bir doğru DE olsun, ve AB'nin orta noktası F olsun. CFnin ve DE'nin kesişim noktası G olsun. G'nin DE'nin orta noktası olduğunu kanıtlayın. Önerme 36'nın tersi



kabul edilebilir. *İpucu*: $AH \parallel FC \parallel BK$ ve $HK \parallel AB$ olsun; DE, L ve M'ye uzatılsın; ve sırasıyla D ve E'den geçen, CF'ye paralel olan NP ve QR çizilsin. NF ve FQ paralelkenarlarının eşit olduğunu gösterin.