Bağıntılar

Öklid Geometrisine Giriş

5 Kasım 2018

1 Analiz

Gerçel sayılar için, işareti $>$ olan **daha büyük olma** bağıntısı sık sık kullanılıyor. İsimli iki özelliği vardır. Daha büyük olma bağıntısı:

- **geçişlidir,** çünkü a, b, ve c gerçel sayı olmak üzere

$$a > b \ \ \& \ \ b > c \ \text{ ise } \ a > c;$$

- **yansımasızdır,** çünkü a gerçel sayı olmak üzere

$$a > a \text{ değildir.}$$

Kısaca gerçel sayılarda

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \, (x > y \land y > z \Rightarrow x > z), \qquad \forall x \; x \not> x.$$

İşareti $<$ olan **daha küçük olma** bağıntısının aynı özelliği vardır:

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \, (x < y \land y < z \Rightarrow x < z), \qquad \forall x \; x \not< x.$$

Bu iki bağıntının her biri, diğerinin **tersidir:**

$$\forall x \, \forall y \, (x < y \Leftrightarrow y > x).$$

Tersi aynı olan bir bağıntı, **simetriktir.** Örneğin eşitlik, simetriktir.

İki bağıntı daha türetilir:

$$\forall x\, \forall y\, \big((x \geqslant y \Leftrightarrow x > y \lor x = y) \land (x \leqslant y \Leftrightarrow x < y \lor x = y)\big).$$

Daha büyük veya eşit olma bağıntısı:

- geçişlidir;
- **yansımalıdır,** çünkü $\forall x\, x \geqslant x$;
- **ters simetrilidir,** çünkü

$$\forall x\, \forall y\, (x \geqslant y \land y \geqslant x \Rightarrow x = y).$$

Bundan dolayı, daha büyük veya eşit olma, bir **sıralamadır.** Bu sıralama **doğrusaldır,** çünkü

$$\forall x\, \forall y\, (x \geqslant y \lor y \geqslant x).$$

Geçişli ve yansımasız olduğundan daha büyük olma, bir **kesin sıralamadır.** Ayrıca kesin **doğrusal** bir sıralamadır, çünkü

$$\forall x\, \forall y\, (x > y \lor x = y \lor y > x).$$

2 Sayılar Kuramı

Eğer tamsayılarda a kere b, c ederse, o zaman

a, c'yi **böler;** b, c'yi **ölçer.**

Öklid'in VII. kitabının 16. önermesinin sayesinde çarpma işlemi değişmelidir, dolayısıyla bölme bağıntısı, ölçme bağıntısı ile aynıdır. Bu bağıntının işareti $\mid$ olduğundan

$$\forall x\, \forall y\, (x \mid y \Leftrightarrow \exists z\; xz = y).$$

Bölme bağıntısı, hem yansımalı hem de geçişlidir.

Sayma sayılarında bölme, ters simetrilidir, dolayısıyla bir sıralamadır. Bu sıralama doğrusal değildir, **parçalıdır.**

Tamsayılarda, Gauss'un 1801 yılında verdiği tanıma göre, eğer bir a sayısı, b ve c'nin farkını ölçerse, o zaman b ve c, a **modülüne göre çakışır,** ve

$$b \equiv c \pmod{a}$$

yazılır. Gauss'un Latince'sinde modül, *modulus*'tur; *modulus,* küçük bir *modus*'tur; *modus,* bir ölçüdür. Kısaca modül, bir ölçücüktür. Bugün, verilen bir modüle göre çakışık sayılara **kalandaş** denebilir.

Her n sayma sayısı için, n modülüne göre kalandaşlık bağıntısı • yansımalıdır, • simetriktir, • geçişlidir. Sonuç olarak, tanıma göre, verilen bir modüle göre kalandaşlık, bir **denklik bağıntısıdır.**

Öklid'in *Öğeler*'inin VII. kitabının başlangıcında bulunan *Öklid Algoritması* ile iki sayma sayısının en büyük ortak böleni elde edilebilir. Şimdi

$$\mathrm{ebob}(a, b) = c, \qquad \mathrm{ebob}(d, e) = f$$

olsun. Eğer

$$a = cx \wedge b = cy \wedge d = fx \wedge e = fy$$

sistemi çözülebilirse, o zaman

$$(a, b) \sim (d, e)$$

yazılsın. Buradaki $\sim$ bağıntısı, bir denklik bağıntısıdır. Bir teoreme göre

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ \forall w\ \big((x, y) \sim (z, w) \Leftrightarrow xw = yz\big).$$

Teoremi kanıtlamak, okura bırakılıyor.

3 Geometri

Analizde ve sayılar kuramında çok ifadeler, *sayı* olarak düşünülür. İki ifadenin sayısal değeri aynı ise, ifadeler **eşittir.** Yukarıda eşitliğin kavramını ve $=$ işaretini zaten kullandık. Örneğin ifade olarak $1 + 2$ ve 3 farklıdır, ama değeri aynıdır, dolayısıyla $1 + 2 = 3$.

Öklid geometrisinde açılar ve sınırlanmış doğrular ve alanlar vardır, ama hiçbirinin sayısal değeri yoktur. Öklid'in "ortak kavramlarına" göre

- birbiriyle çakışan veya örtüşen, veya birbirine uygulayan, şeyler eşittir;

- eşitlik, bir denklik bağıntısıdır.

Örneğin Önerme 4'e göre iki üçgende iki kenar, iki kenara eşit ise, ve içerilen açılar da eşit ise, o zaman üçgenler de eşittir, çünkü çakışır. Önerme 35'te çakışmayan ama *parçaları* çakışan paralelkenarlar eşittir.

4 Kümeler Kuramı

İki kümenin elemanları aynı ise, kümeler **eşittir.**

Verilen bir A kümesinde bir B **bağıntısı,** $A \times A$ veya A^2 çarpımının bir altkümesidir. Örneğin $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinde, eğer pozitif sayılar, P kümesini oluşturursa, o zaman daha büyük olma bağıntısı,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x - y \in P\}$$

kümesidir. Ayrıca $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinde bir n modülüne göre kalandaşlık

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \colon n \mid x - y\}$$

kümesidir.

Bir A kümesinde D, bir denklik bağıntısı olsun. Eğer $b \in A$ ise, o zaman tanıma göre b'nin **denklik sınıfı** veya D **sınıfı,**

$$\{x \in A \colon x \mathrel{D} b\}$$

kümesidir. Bu sınıf, $[b]$ veya $\bar{b}$ veya b/D olarak yazılabilir.

Bir özel durumda, başka bir ifade vardır. Eğer $\sim$ bağıntısı yukarıdaki gibi tanımlanırsa, o zaman a ve b sayma sayısı olmak üzere (a, b) sıralı ikilisinin $\sim$ sınıfı, $\frac{a}{b}$ veya a/b **kesirli sayısı** olarak anlaşılabilir.

Genelde

$$[b] \cap [c] \neq \varnothing \Rightarrow [b] = [c].$$

Bu sonuca bir kanıt bulmak, okura bırakılıyor.