Öklid Geometrisine Giriş

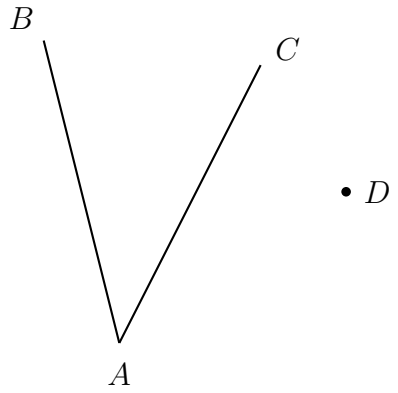
Final Sınavı *Çözümleri*

Kıvanç Ersoy David Pierce Gülay Telsiz
İpek Tuvay

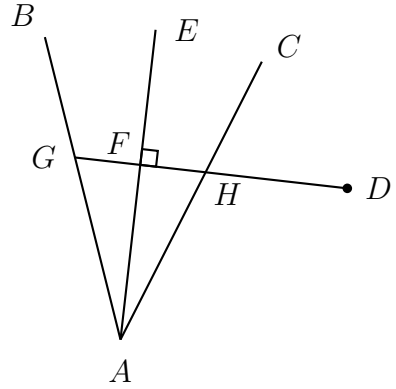
5 Ocak 2017

Buradaki dört problemden sadece üç tanesini çözün.

Problem 1. AB ve AC doğrularının kesişimi ile oluşan bir BAC açısı ve bir D noktası verilmiş olsun. D noktasından geçen ve (A'nın tarafında) AB, AC doğrularından eşit parçalar ayıran bir doğru çizilebileceğini gösteriniz. *İpucu*: BAC açısını ikiye bölen doğruyu çizerek başlayabilirsiniz.

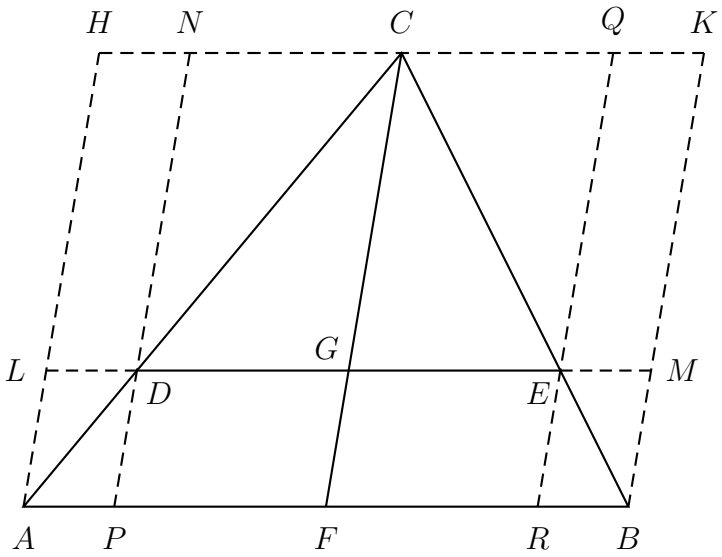


Çözüm.



1. BAC açısı AE doğrusu ile ikiye bölünsün [9].
2. AE'ye dik olan DF indirilsin [12].
3. Bu DF doğrusu, AB'yi G'de ve AC'yi H'de kessin.
4. AFG ve AFH açıları dik olduğundan eşittir.
5. FAG ve HAG açıları da eşit olduğundan, ve AF ortak olduğundan, AFG ve AFH üçgenlerinde $AG = AH$ [26].

Problem 2. Bir ABC üçgeninin AB tabanına paralel olan ve diğer kenarları kesen bir doğru DE olsun, ve AB'nin orta noktası F olsun. CFnin ve DE'nin kesişim noktası G olsun. G'nin DE'nin orta noktası olduğunu kanıtlayın. Önerme 36'nın tersi kabul edilebilir. *İpucu*: $AH \parallel FC \parallel BK$ ve $HK \parallel AB$ olsun; DE, L ve M'ye uzatılsın; ve sırasıyla D ve E'den geçen, CF'ye paralel olan NP ve QR çizilsin. NF ve FQ paralelkenarlarının eşit olduğunu gösterin.



Çözüm. [Eğer bir XY doğrusu bir paralelkenarın çizilmemiş köşegeniyse, o zaman XY bu paralelkenarın adıdır.]

1. $HF = FK$ ve $LF = FM$	[36]
2. $HG = GK$	[O.K. 3]
3. $HD = DF$ ve $FE = EK$	[43]
4. $HG = NF$ ve $FQ = GK$	[O.K. 2]
5. $NF = FQ$	[O.K. 1]
6. $PF = FR$	[36'nın tersi]
7. $PF = DG$ ve $FR = GE$	[34]
8. $DG = GE$	[O.K. 1]

Problem 3. (a) Aşağıdaki formüllerin ikisinin her biri, diğerinin değillemesine denktir. Hangi formül, hangi formülün değillemesine denktir?

$$\neg Q \wedge (R \to \neg P), \qquad \neg P \vee \neg R \to Q, \qquad P \vee Q \to \neg(P \wedge Q).$$

(b) Biçimsel kanıt ile

$$R \leftrightarrow P \vee S,\ R \to Q \models P \to Q$$

gerektirmesini gösterin.

Çözüm. (a) Verilen formüllerin doğruluk tabloları

$\neg$	Q	$\wedge$	$(R$	$\to$	$\neg$	$P)$	$\neg$	$(P$	$\wedge$	$R)$	$\to$	Q	P	$\vee$	Q	$\to$	$\neg$	$(P$	$\wedge$	$Q)$
1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1

olduğundan

$$\neg Q \wedge (R \to \neg P) \sim \neg(\neg P \vee \neg R \to Q).$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}\neg(\neg P \vee \neg R \to Q) &\sim \neg\big(\neg(\neg P \vee \neg R) \vee Q\big)\\ &\sim (\neg P \vee \neg R) \wedge \neg Q \sim (R \to \neg P) \wedge \neg Q \sim \neg Q \wedge (R \to \neg P).\end{aligned}$$

(b)

1.	$R \leftrightarrow P \vee S$	hipotez
2.	$P \vee S \to R$	[basitleştirme]
3.	$\neg(P \vee S) \vee R$	
4.	$(\neg P \wedge \neg S) \vee R$	
5.	$(\neg P \vee R) \wedge (\neg S \vee R)$	
6.	$\neg P \vee R$	basitleştirme
7.	$P \to R$	
8.	$R \to Q$	hipotez
9.	$P \to Q$	hipotetik tasım

Problem 4. (a) Aşağıdaki verilen doğruluk tablosunu doldurun.

(b) En sevdiğiniz yöntemi kullanarak $Q \to R$ formülünün $\neg P \to Q \to R \wedge 1$ formülünü gerektirdiğini gösterin.

(c) Zaten yapmadıysanız, $Q \to R \models \neg P \to Q \to R \wedge 1$ gerektirmesini biçimsel kanıt ile gösterin.

$\neg$	P	$\to$	Q	$\to$	R	$\wedge$	1
	0		0		0		
	1		0		0		
	0		1		0		
	1		1		0		
	0		0		1		
	1		0		1		
	0		1		1		
	1		1		1		

Çözüm.

(a)

$\neg$	P	$\to$	Q	$\to$	R	$\wedge$	1
1	0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1

(b)

Q	$\to$	R
0	1	0
0	1	0
1	0	0
1	0	0
0	1	1
0	1	1
1	1	1
1	1	1

($Q \to R$ formülünün doğru olduğu her satırda $\neg P \to Q \to R \wedge 1$ de doğrudur)

(c)

$$Q \to R$$
$$Q \to R \wedge 1$$
$$P \vee (Q \to R \wedge 1)$$
$$\neg P \to Q \to R \wedge 1$$