Öklid alıştırmaları

Mat 113, MSGSÜ

30 Ekim 2013

İçindekiler

1. önermeden sonra 2
5. önermeden sonra 2
6. önermeden sonra 2
7. önermeden sonra 3
8. önermeden sonra 3
9. önermeden sonra 3
10. önermeden sonra 3
11. önermeden sonra 3
12. önermeden sonra 4
15. önermeden sonra 4
17. önermeden sonra 4
19. önermeden sonra 5
26. önermeden sonra 5
28. önermeden sonra 5
29. önermeden sonra 6
32. önermeden sonra 6
34. önermeden sonra 6
35. önermeden sonra 7
36. önermeden sonra 7
41. önermeden sonra 8
43. önermeden sonra 8
Çarpma 11

1. önermeden sonra

Alıştırma 1. Öklid'in önermelerini kullanmadan, verilmiş sınırlanmış doğruda, kenarları birbirine eşit olan ama tabana eşit olmayan bir üçgen inşa edin.

Alıştırma 2. Öklid'in önermelerini kullanmadan, verilmiş sınırlanmış doğruda, kenarlarının sadece biri tabana eşit olan bir üçgen inşa edin.

Alıştırma 3. Öklid'in önermelerini kullanmadan, verilmiş sınırlanmış doğruda, çeşitkenar bir üçgen inşa edin.

5. önermeden sonra

Alıştırma 4. Hiç bir postulat kullanmadan ikizkenar bir üçgenın tabanındaki açıların birbirine eşit olduğunu ispatlayın.

Alıştırma 5. Bir dörtgende, iki bitişik kenar birbirine eşittir, ve iki kalan bitişik kenar birbirine eşittir. Eşit olmayan kenarlar tarafından yapılmış açıların eşit olduğunu ispatlayın.

6. önermeden sonra

Alıştırma 6. Bir üçgenin iki kenarı birbirine eşit olmasın. *Olmayana ergi yöntemi kullanmadan* raptedilen açıların eşit olmadığı kanıtlanabilir mi?

Alıştırma 7. Üç açısı birbirine eşit olan bir üçgenin eşkenar olacağını ispatlayın.

Alıştırma 8. Eğer bir üçgenin tabanının altındaki dış açılar eşitse üçgen ikizkenardır.

7. önermeden sonra

Alıştırma 9. Yedinci önermede, Öklid sadece bir durumun olanaksızlığını ispatlar. Öteki durumların olanaksızlığını ispatlayın.

8. önermeden sonra

Alıştırma 10. Doğru uzatma postulatını kullanmadan 2. önermeyi çözün, yani verilmiş noktaya verilmiş doğruya eşit olan bir doğru yerleştirin.

9. önermeden sonra

Alıştırma 11. 8. önermeyi kullanmadan 9. önermeyi kanıtlayın.

10. önermeden sonra

Alıştırma 12. 1. önermeyi çözmek için, iki daire gerekir, dolayısıyla 9. önermeyi çözmek için, üç daire gerekir. Öyleyse Öklid'in yöntemiyle 10. önerme beş daire kullanır. *İki* daire kullanarak verilmiş sınırlı bir doğruyu ikiye bölün.

Alıştırma 13. Herhangi bir ikizkenar üçgende tabana inen kenarortay diktir.

11. önermeden sonra

Alıştırma 14. 8. önermeyi kullanmadan 11. önermeyi kanıtlayın.

12. önermeden sonra

Alıştırma 15. Uygulamayı kullanmadan sekizinci önermeyi ispatlayın.

15. önermeden sonra

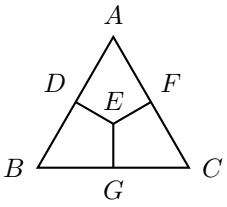
Alıştırma 16. Verilen bir doğrunun bir noktasından iki doğru, ayrı tarafa çizilsin. Öklid'in 15. önermesine göre, eğer bu iki doğru, bir doğru üzerindeyse, o zaman verilen doğruyla oluşturdukları ters açılar birbirine eşittir. Bu önermenin tersini gösterin.

17. önermeden sonra

Alıştırma 17. Bir kenar uzatlamadan 17. önermeyı ispatlayın. (Proklos bunu bir köşeden karşı kenara bir doğru çizerek ispatladı.)

Alıştırma 18. İki üçgende, tabandaki bir açı tabandaki bir açıya eşitse, açıyı gören kenar açıyı gören kenara eşitse, ve kalan kenar kalan kenara eşitse, ya tabanlar birbirine eşittir, ya da tabanlardaki kalan açıların biri oput [geniş], biri dardır.

Alıştırma 19.



ABC üçgeninde DE doğrusu, AB kenarına dik ve bu kenarı ikiye böler. Benzer şekilde FE doğrusu, AC kenarına dik ve bu kenarı ikiye böler. EG doğrusu, BC kenarına dikse, bu kenarı ikiye böldüğünü gösterin.

19. önermeden sonra

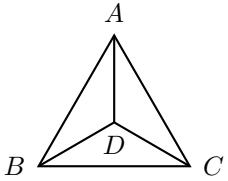
Alıştırma 20. Bir doğruya dışındaki bir noktadan indirilen dikme, o noktayı doğru üzerindeki noktalara birleştiren diğer doğrulardan küçüktür.

26. önermeden sonra

Alıştırma 21. İkizkenar üçgende tabandaki açıları ikiye bölenlerin (yani *açıortayların*) birbirine eşit olduğunu gösterin.

Alıştırma 22.

ABC üçgeninde BD ile CD, tabandaki açıları ikiye böler. AD doğrusunun da BAC açısını ikiye böldüğünü gösterin.

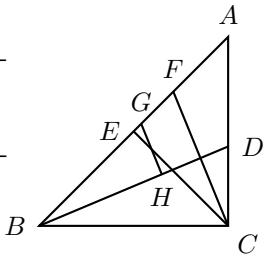


28. önermeden sonra

Alıştırma 23. Tabanındaki açıları ikiye bölenlerin eşit olduğu üçgenin ikizkenar olduğunu gösterin. *İpucu:* Aşağıdaki şekli kullanarak karşıt tersini gösterin.

ABC üçgeninde

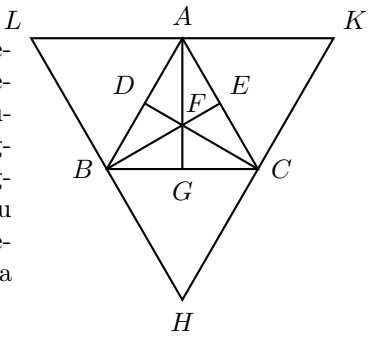
1) BD ile CE, tabandaki açıları ikiye böler;
2) FCE açısı, ABD açısına eşittir;
3) AB kenarının BG parçası, CF doğrusuna eşittir;
4) BGH açısı, BFC açısına eşittir.



29. önermeden sonra

Alıştırma 24.

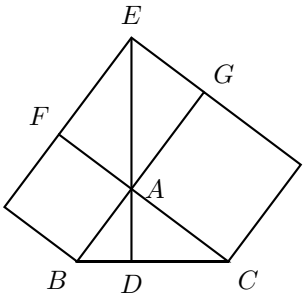
ABC üçgeninde CD doğrusu, AB kenarına diktir, ve BE doğrusu, AC kenarına diktir. Bu CD ile BE doğruları, F noktasında kesişirler. AG doğrusu, F noktasından geçer. AG doğrusunun BC tabanına dik olduğunu gösterin. *İpucu:* HKL üçgeninin kenarları, ABC üçgeninin kenarlarına paralel olsun.



32. önermeden sonra

Alıştırma 25.

Şeklimiz, Öklid'in 47. önermesinden alınmıştır. ABC üçgeninde A noktasındaki açı diktir ve AD doğrusu, BC tabanına diktir. BF ile CG dörtgenleri, karedirler. AE doğrusu, AE dikdörtgeninin köşegenidir. AD ile AE doğrularının bir doğruda olduğunu gösterin.



34. önermeden sonra

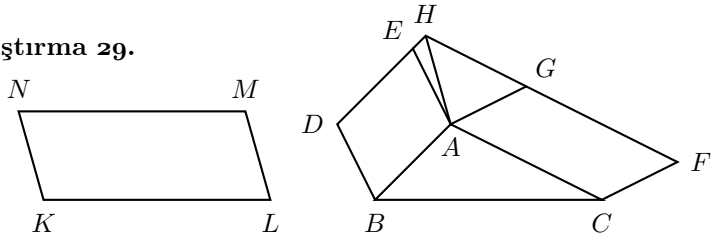
Alıştırma 26. Bir dikdörtgenin köşegenlerinin birbirine eşit olduğunu gösterin.

Alıştırma 27. Bir paralelkenarın köşegenlerinin birbirini ikiye böldüğünü gösterin.

Alıştırma 28. İki paralelkenarda, iki bitişik kenar, iki bitişik kenara eşit ise, ve içerilen açı, içerilen açıya eşit ise, paralelkenarlar birbirine eşittir.

35. önermeden sonra

Alıştırma 29.



ABC, herhangi bir üçgendir, ve AD ile AF, ABC üçgeninin kenarlarında rastgele seçilmiş iki paralelkenardır. Gerekirse, bu paralelkenarların DE ile FG kenarları uzatılır, ve H noktasında kesişirler. $KLMN$ paralelkenarında, KL tabanı, ABC üçgeninin BC tabanına eşit, ve KN kenarı, AH doğrusuna eşittir; ve NKL açısı, ABC ile DHA açılarının toplamına eşittir. AD ile AF paralelkenarlarının toplamının $KLMN$ paralelkenarına eşit olduğunu gösterin.

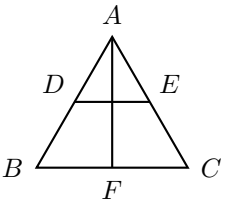
36. önermeden sonra

Alıştırma 30. İki paralelkenar, aynı paralellerde olsun. Öklid'in 36. önermesine göre, paralelkenarların tabanları birbirine eşitse, paralelkenarlar da birbirine eşittir. Tersini gösterin.

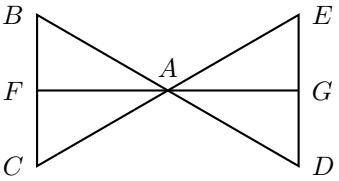
41. önermeden sonra

Alıştırma 31.

DE doğrusu, ABC üçgeninin BC tabanına paraleldir. AF doğrusu, tabanı ikiye böler. AF doğrusunun DE doğrusunu da ikiye böldüğünü gösterin.



Alıştırma 32.

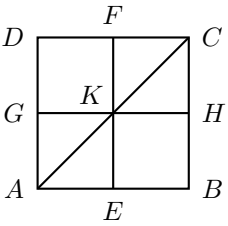


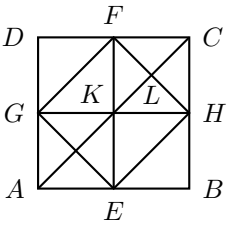
Şekilde DE doğrusu, BC doğrusuna paraleldir, ve BD, CE, ve FG doğruları, birbiriyle A noktasında kesişirler. FG doğrusu, BC doğrusunu ikiye böler. FG doğrusunun DE doğrusunu da ikiye böldüğünü gösterin.

43. önermeden sonra

Alıştırma 33.

$ABCD$ bir paralelkenardır, ve EF ile GH doğruları, paralelkenarın kenarlarına paraleldir. Öklid'in 43. önermesine göre, eğer AK ile KC doğruları, bir doğrudaysa, o zaman DK ile KB paralelkenarları, birbirine eşittir. Bu önermenin tersini gösterin.

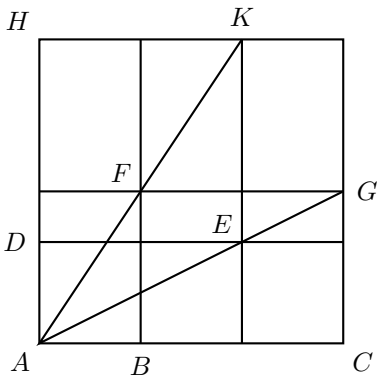




İpucu: FG, GE, EH, HF, ve AKL, doğrular olsun. O zaman

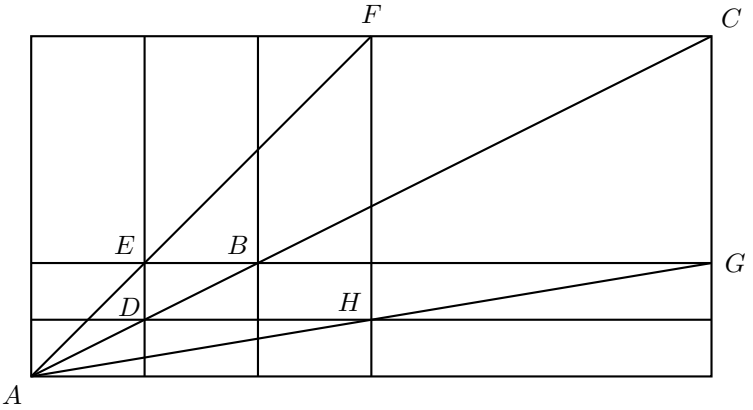
1) AL, GE doğrusunu ikiye böler;
2) EFG ile EHG üçgenleri, birbirine eşittir;
3) AL, FH doğrusunu ikiye böler;
4) FLK ile CLH açıları, birbirine eşittir.

Alıştırma 34. Diagramda dikey doğrular birbirine paraleldir, ve

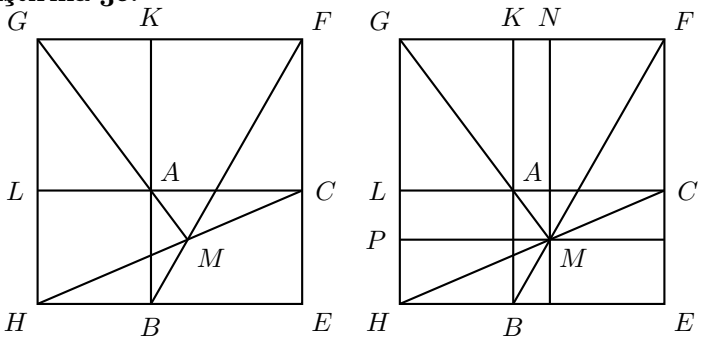


yatay doğrular birbirine paraleldir, ve BD dörtgeni bir karedir. AFK çizgisi doğrudur. AEG çizgisinin doğru olması için CH dörtgeninin kare olmasının gerekli ve yeterli olduğunu gösterin.

Alıştırma 35. Diagramda dikey doğrular birbirine paraleldir ve yatay doğrular birbirine paraleldir. $ADBC$ bir doğrudur ve AEF bir doğrudur. AH ile HG doğrularının bir doğruda olduğunu gösterin.

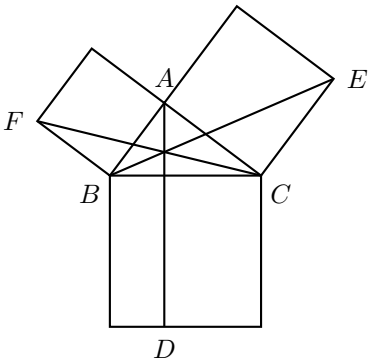


Alıştırma 36.



$EFGH$ paralelkenarında BK ile LC doğruları, kenarlara paraleldirler, ve A noktasında kesişir. EL paralelkenarının CH köşegeni çizilmiştir. GA doğrusu çizilmiş ve CH doğrusundaki M noktasına uzatılmıştır. MB ile MF doğruları çizilmiştir. Bu MB ile MF doğrularının bir doğruda olduğunu gösterin.

Alıştırma 37.



Öklid'in 47. önermesinin şeklinde AD, BE, ve CF doğrularının bir noktada kesiştiğini gösterin. (Burada AD doğrusu, BC doğrusuna diktir.)

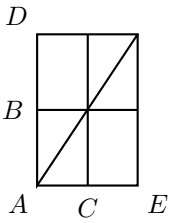
Çarpma

Çağdaş dilde, Öklid'deki doğruların (yani sınırlanmış doğruların) eşitliği, bir *denklik bağıntısıdır.* Yani eşitlik *yansımalı, simetrik,* ve *geçişlidir:* A, B, ve C doğrular ise, o zaman

- $A = A$,
- $A = B$ ise $B = A$,
- $A = B$ ve $B = C$ ise $A = C$.

Bir doğrunun *denklik sınıfı,* bu doğruya eşit olan doğruların sınıfıdır. Bir A doğrusunun denklik sınıfı $|A|$ ile gösterilsin, ve ona, A doğrusunun **uzunluğu** densin.

İki uzunluğun çarpımını tanımlamak istiyoruz. Bir *birim* uzunluğu seçilmelidir. Seçilsin. Aşağıdaki dikdörtgende AB doğrusunun uzun-



luğu, birim olsun. O zaman AE tabanının uzunluğu, sadece AC ve AD doğrularının uzunluklarına bağlıdır. Bu durumda

$$|AE| = |AD| \cdot |AC|$$

olsun.

Alıştırma 38. 34. alıştırmayı kullanarak çarpmanın değişmeli olduğunu gösterin.

Alıştırma 39. 35. alıştırmayı kullanarak çarpmanın birleşmeli olduğunu gösterin.